

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

AKADEMISCHE REDEN

47

REKTORATSÜBERGABE

24. NOVEMBER 1967

AN DER
TECHNISCHEN UNIVERSITÄT
BERLIN

I.

Die folgenden Ausführungen haben zwei Aufgaben:

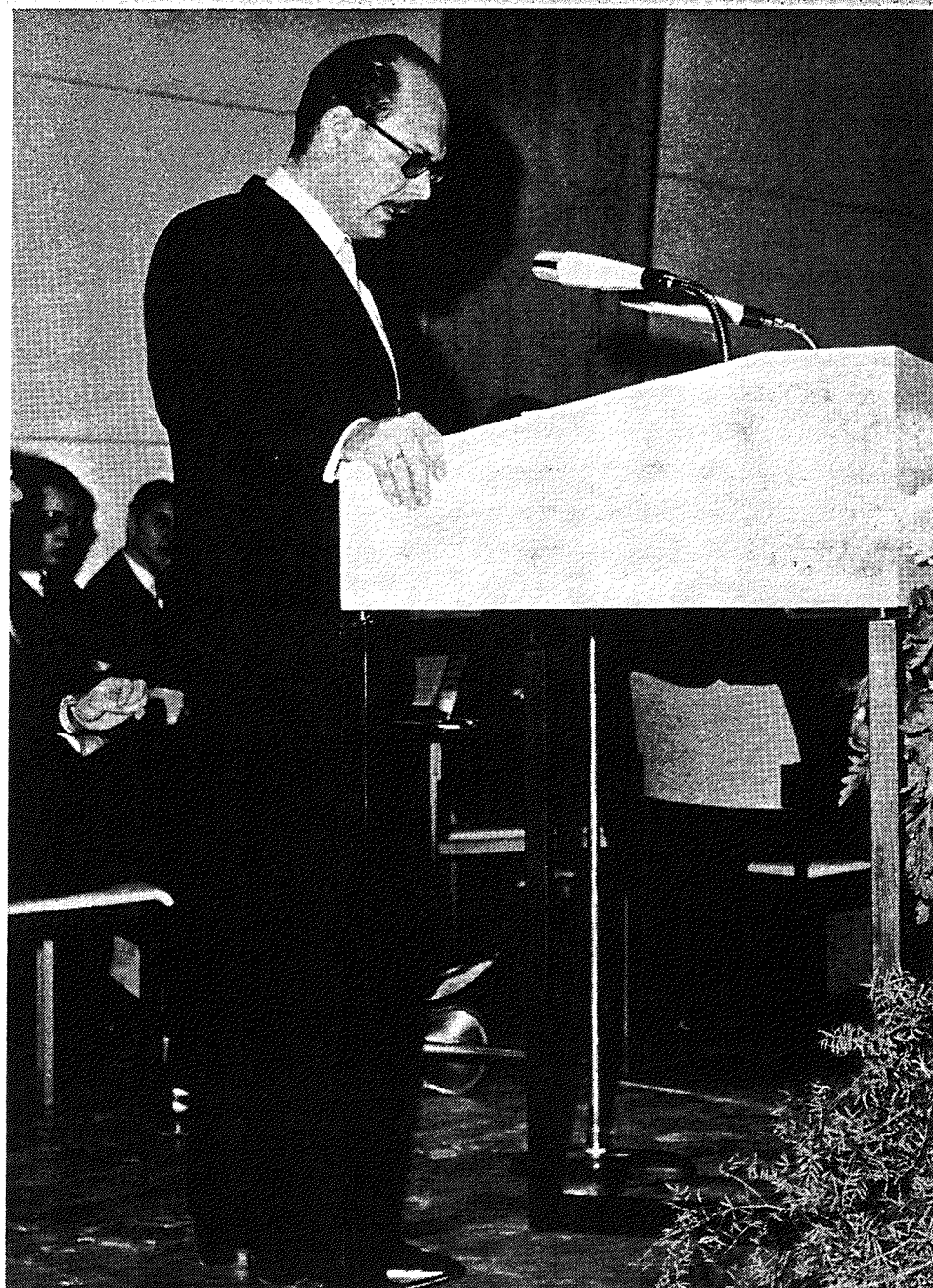
1. eine Darstellung der Statistik, wie sie heute als Wissenschaft gepflegt wird, und
2. die erstmalige Vorstellung gewisser Gedanken, die für eine Gruppe grundsätzlicher Probleme der Statistik eine einheitlichere Betrachtungsweise ermöglichen sollen als die bisher gebräuchlichen Konzepte.

Ich beginne mit einem Versuch, den Charakter der Statistik als Wissenschaft, wie er sich heute darstellt, zu schildern. Der Wortgebrauch der Umgangssprache deckt sich beim Wort Statistik nicht mit dem Wortgebrauch der Wissenschaft. Genauer gesagt, er hat die Veränderungen und Gewichtsverlagerungen, die sich für den Begriff der Statistik als Wissenschaft in den letzten 50 Jahren ergeben haben, kaum mitgemacht. Dieser Bedeutungswandel im Begriff der Statistik als Wissenschaft besteht in einem Übergang von einer Substanzwissenschaft zu einer Formalwissenschaft, d. h. im Übergang von einer Wissenschaft, die bestimmte Aspekte unserer Umwelt beschreibt und analysiert, etwa die Gesellschaft oder die Natur, zu einer Wissenschaft, die formale Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten betrachtet, die sich in vielen Substanzwissenschaften anwenden lassen. Das Verhältnis zwischen diesen beiden Begriffen kann somit verglichen werden mit dem etwa zwischen der Physik als Substanzwissenschaft und der Mathematik als formaler Wissenschaft, ein Vergleich, auf den man bei der näheren Betrachtung des Gegenstandes noch oft stößt.

Der Wandel in den Begriffsinhalten zeigt sich bereits im Namen dieser Wissenschaft. Das Wort Statistik wird vom lateinischen Wort „status“ hergeleitet, das im Neulateinischen auch die Bedeutung von „Staat“ übernahm, aus dem sich im Italienischen das Wort lo statista, „der Staatsmann“ entwickelte. Eingeführt wurde der Ausdruck „Statistik“ im 18. Jahrhundert durch Gottfried Achenwall, der Professor in Göttingen war.

II.

Es ist zweckmäßig, sich vor Augen zu halten, welche historischen Entwicklungslinien schließlich in den heutigen Begriff der Statistik mündeten: Die älteste ist die der staatlichen Zählungen. Sie soll, wenn man altchinesischen Quellen trauen darf, bis in das zweite Jahrtausend vor Christus zurückgehen. Die statistischen Ämter in Städten, Ländern und Staaten, der statistische Dienst



Der Rektor Professor Dr. phil. Kurt Weichselberger

überregionaler Organisationen, die Veranstaltung von einmaligen und laufenden Erhebungen der amtlichen Statistik, das alles sind die heutigen Stationen einer traditionsreichen Entwicklung, die vor allem in der Zeit nach dem Zweiten Weltkrieg große Fortschritte gemacht hat. Ein bekannter deutscher Statistiker, Georg von Mayr, hat diese Art der Statistik einmal als „Statistik als Kunst“ bezeichnet, und der „Statistik als Wissenschaft“ gegenübergestellt. In der Tat ist der Wortgebrauch der Umgangssprache vorwiegend auf diesen Aspekt der Statistik gerichtet. In den Begriff der Statistik, wie ihn heute die Wissenschaft verwendet, sind aber noch andere Entwicklungslinien eingegangen.

Als nächste sei diejenige erwähnt, die den Namen Statistik eingebracht hat: Es ist dies eine wissenschaftliche Richtung, die im 17. Jahrhundert in verschiedenen mitteldeutschen Universitäten, wie Helmstedt und Göttingen, Fuß faßte. Sie wollte eine Staatenkunde sein und dem Staatsmann das erforderliche Rüstzeug für sachgerechte Entscheidungen an die Hand liefern. Ursprünglich spielten bei dieser Staatenbeschreibung übrigens Zahlen gar keine Rolle, erst eine spätere Entwicklung legte immer mehr Wert auf zahlenmäßige und tabellarische Darstellungen. Diese Art Statistik als eine Substanzwissenschaft hat lange Zeit hindurch eine entscheidende Rolle gespielt. Sie ist allerdings für den umfassenden Begriff Statistik in dem Maße in den Hintergrund getreten, als ihre Fragestellungen von einzelnen Substanzwissenschaften aufgegriffen und in ihrem Bereich vervollkommen wurden. Man würde heute sagen, daß es sich um eine politische Geographie gehandelt hat mit vielen Detailaspekten, die in der Zwischenzeit von der Soziologie, der Ethnologie oder der Nationalökonomie, speziell einer Wirtschaftskunde, aufgenommen wurden. Dies ist eine deutliche Folge der Spezialisierung in den Wissenschaften, die es nicht mehr erlaubt, daß alle zahlenmäßigen Aspekte der Gesellschaft von einem „Fachmann für Zahlen“ studiert werden. Trotzdem ist auch heute noch der Statistiker aufs engste verbunden mit dem empirischen Wirtschaftsforscher und dem empirischen Sozialforscher, doch fungiert er hierbei als methodischer Berater und tritt in sachlichen Fragen hinter der Kompetenz des Substanzwissenschaftlers zurück.

Auch die dritte der historischen Entwicklungslinien setzt im 17. Jahrhundert ein, und zwar in England. Man nennt hier meistens als ersten den Engländer John Graunt, aber in seiner Folge etwa auch die Engländer Halley und Petty, den Deutschen Süßmilch und den Belgier Quetelet. Die „politische Arithmetik“ versuchte schon im 17. Jahrhundert den Gesetzmäßigkeiten nachzuspüren, die hinter den scheinbar ungeordneten und unvorhergesehenen Einzelschicksalen der Menschen aufzufinden sind. Charakteristisch dafür ist der Titel des Buches von Johann Peter Süßmilch „Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts – aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben er-

wiesen“. Zum Unterschied von der vorhergenannten Richtung der Staatenkunde – oder Universitätsstatistik, wie sie auch genannt wurde – ging es also bei der politischen Arithmetik nicht um die Darstellung von Fakten, sondern um das Auffinden von Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhängen, im Grunde eine sehr moderne Fragestellung. Quetelet nannte das auch „physique sociale“. Interessant ist, daß man bei solchen Studien bald zu Auseinandersetzungen über die Frage der Willensfreiheit des Menschen kam, vor allem als man auch die Kriminalstatistik dieser Betrachtungsweise unterwarf. Gescheitert ist diese wissenschaftliche Richtung schließlich daran, daß sie im Grunde statisch angelegt war. Sie glaubte, ewige Gesetze nachweisen zu können, und kam damit in Widerspruch zu den Beobachtungen einer sich rasch entwickelnden Industriegesellschaft im 19. Jahrhundert: ein interessantes soziologisches Beispiel einer Betrachtungsweise, die auf eine bestimmte Gesellschaft zugeschnitten ist und unter veränderten sozialen und wirtschaftlichen Bedingungen ihre Daseinsberechtigung einbüßt. Nichtsdestoweniger darf man die politische Arithmetik als Vorläuferin einer Anzahl moderner Spezialwissenschaften betrachten, etwa der Ökonometrie, der Demographie, der Biometrie, der Anthropometrie, der Psychometrie, der mathematischen Soziologie und ähnlicher Wissenschaften, die sich darum bemühen, Gesetzmäßigkeiten in der Umwelt des Menschen und im menschlichen Verhalten mittels statistischer Methoden aufzufinden und zu beschreiben.

Die vierte der historischen Entwicklungslinien, die zum heutigen Begriff der Statistik führen, ist die Wahrscheinlichkeitstheorie. Ihre Entwicklung reicht, wenn man von sagenhaften chinesischen Ansätzen absieht, etwa in das 16. Jahrhundert zurück. Gerolamo Cardano, der ein Buch „Liber de ludo aleae“ schrieb, hinterließ wohl das erste literarische Zeugnis für diese Entwicklung. Schon aus dem Titel seines Buches „Über das Würfelspiel“ erkennt man, daß das Interesse für den Gegenstand damals sehr einseitig aus der Beschäftigung mit dem Glücksspiel entsprang. Bis ins 18. Jahrhundert blieb dies so. Eine Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie im 17. und 18. Jahrhundert kann an fast keinem der großen Mathematiker jener Zeit vorübergehen. Man muß die Namen Pascal, Fermat, Leibniz, Bernoulli, De Moivre, Euler, Lagrange, Laplace und viele andere nennen. Durch Lagrange, Laplace und vor allem Gauß wird dann die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Probleme der Naturwissenschaft vorbereitet und durchgesetzt. Man denke an die Ausgleichsrechnung und an die Anwendung der Normalverteilung – die bereits im Jahre 1733 abgeleitet worden war – auf die Theorie der Meßfehler durch Gauß. In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts nimmt diese Entwicklung einen sehr raschen Aufschwung. Die englische Schule der Biologie übernimmt hier die Rolle eines Wegbereiters. Namen wie Francis Galton und Karl

Pearson mögen für viele andere stehen. Das Gewicht der Probleme der Anwendung in den Naturwissenschaften und zum Teil auch in den Wirtschaftswissenschaften wird so groß, daß sich allmählich eine Ablösung der Wissenschaft Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik aus der Mathematik vollzieht. Biologen, Psychologen und Ökonomen haben einen besonderen Anteil an der Entwicklung, die sich nun anbahnt. Das Bedürfnis nach mehr Exaktheit in der Argumentation führt jedoch bald die Statistik wieder an die Mathematik heran. Die Frage nach den Grundlagen des Wahrscheinlichkeitsbegriffes stellt sich immer dringender. Richard von Mises versucht, eine naturwissenschaftliche Definition der Wahrscheinlichkeit zu geben, doch führt sie zu begrifflichen Schwierigkeiten, und im Jahre 1933 veröffentlicht der Russe Kolmogoroff die Monographie „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“, in der er ein Axiomensystem für die Wahrscheinlichkeitsrechnung einführt und damit die Voraussetzungen für eine exakte mathematische Behandlung der Wahrscheinlichkeitstheorie schafft. Mit dieser Einordnung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in das System einer exakten Mathematik beginnt für sie und die Mathematische Statistik ein ungeheurer Aufschwung. Daran sind in hervorragendem Maße anglo-amerikanische Statistiker beteiligt, aber auch die russische Schule liefert wertvolle Beiträge.

Die Entwicklung birgt allerdings auch Gefahren: Die Integration in die Mathematik geht bei der Mathematischen Statistik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung zum Teil heute so weit, daß die begrifflichen Grundlagen zu kurz kommen und viele Fragestellungen nur aus ihrer innermathematischen Bedeutung her zu verstehen sind, nicht mehr aus der Bedeutung der Statistik als Formalwissenschaft im Hinblick auf die Anwendung in Substanzwissenschaften. Gefährlich wird diese Entwicklung dadurch, daß sie das Interesse für die Statistik als Methodenlehre erlahmen läßt und den Kontakt zu den Substanzwissenschaften beeinträchtigt.

III.

Wodurch haben die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Mathematische Statistik den großen Einfluß auf das Gesamtgebiet der Statistik bekommen, den sie in der Tat heute ausüben? Um dies zu beantworten, muß man zuerst klarstellen, was heute als Statistik verstanden wird. Es gibt sehr viele Definitionen des Begriffs. Die meisten von ihnen bringen ihn mit dem Begriff Massenerscheinungen in Zusammenhang, doch scheint es am besten, zu definieren: Statistik ist die Methodenlehre empirischer Erhebungen. Sie ist eine Hilfswissenschaft, die überall dort angewendet werden muß, wo Fragestellungen nur auf Grund empirisch ermittelter Daten beantwortet werden können. Damit ergibt sich eine Dreiteilung ihres Aufgabenbereichs: In

1. das Sammeln der Daten,
2. das Beschreiben der Daten und
3. das Ziehen von Schlußfolgerungen aus den Ergebnissen der Erhebungen.

Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik sind die Verfahren, die für die dritte Aufgabe allein zuständig sind: Man nennt dies auch die induktive oder schließende Statistik. Je mehr sich aber die integrierende Betrachtungsweise durchsetzt, desto mehr werden auch die ersten beiden Aufgaben in ihrer Durchführung davon beeinflusst, wie die dritte gelöst werden kann. Das heißt, man wird die Daten so sammeln und so beschreiben, daß sie im Hinblick auf das vorhandene Erkenntnisziel möglichst wertvolle und verlässliche Informationen liefern. Es kann nicht ausbleiben, daß die Gesichtspunkte, die sich aus der induktiven Statistik ergeben, die ursprünglich rein technischen Gesichtspunkte für das Sammeln und Beschreiben von empirischen Daten immer mehr durchdringen und damit die statistische Methodenlehre als Ganzes immer mehr beeinflussen.

IV.

Die Grundprobleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Mathematischen Statistik ihrerseits können nur auf dem Wege über eine Diskussion des Wahrscheinlichkeitsbegriffs behandelt werden. Auch sie sei historisch begonnen.

Wie erwähnt, entstand die Wahrscheinlichkeitsrechnung aus dem Studium der Glücksspiele, vor allem des Würfelspiels und des Kartenspiels. In beiden Fällen gibt es den Begriff des fairen oder gerechten Spiels: Ein Würfel, der nicht verfälscht ist, ein Kartenspiel, das nicht gezinkt ist und bei dem nicht geschwindelt wird. Obwohl schon Cardano auch die Möglichkeit des Betrugs in Betracht zieht, bleibt doch dieses gerechte Spiel der eigentliche Gegenstand der Betrachtung in der Wahrscheinlichkeitstheorie. Das gerechte Spiel läßt sich jedoch wahrscheinlichkeitstheoretisch relativ leicht beschreiben: Jedes Ergebnis, etwa jeder Würfelwurf, soll gleich-wahrscheinlich sein wie ein anderes. Daraus entstand ein intuitiver Wahrscheinlichkeitsbegriff, der lange Zeit als selbstverständlich in Gebrauch war, bis er im Jahre 1812 von Laplace in eine Definition gefaßt wurde:

Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses =

$$\frac{\text{Zahl der Fälle, die für dieses Ereignis günstig sind}}{\text{Zahl der gleichmöglichen Fälle}}$$

Dieser Wahrscheinlichkeitsbegriff nach der Definition von Laplace ist offensichtlich nur anwendbar, wenn es nur gleichmögliche Fälle gibt. Dies ist aber schon im Würfelspiel dann nicht der Fall, wenn der Würfel nicht eine ideale geometrische Gestalt hat, sondern

ein realer physikalischer Würfel ist. Für die Anwendung in den Naturwissenschaften ist die Voraussetzung gleichmöglicher Fälle nur sehr selten erfüllt. Daher ergab sich bald die Notwendigkeit, auch Situationen mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie zu behandeln, in denen der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff nicht verwendet werden konnte. Es gab viele Versuche, die Definition von Laplace so zu modifizieren, daß sie auch in jenen Fällen anwendbar sein sollte. Keiner dieser Versuche konnte der Kritik standhalten. Die Entwicklung von Verfahren und Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung ging dabei weiter, obwohl die Grundlagen ungeklärt blieben.

Im Jahre 1919 veröffentlichte dann Richard von Mises zum ersten Mal seine Definition eines naturwissenschaftlichen Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Er zog als Grundlage für seine Definition ein wichtiges Ergebnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung heran: Das sogenannte Theorem von Bernoulli. Es besagt folgendes: Wenn man

Theorem von Bernoulli:

P: Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses

p: relative Häufigkeit desselben

n: Anzahl der Versuche

$\delta > 0$ beliebig

$$\frac{1}{4n\delta^2} > \text{Wahrscheinlichkeit, daß } \{ |p_n - P| > \delta \}$$

ein Experiment sehr oft wiederholen kann, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür sehr groß, daß die relative Häufigkeit eines bestimmten Ergebnisses und die Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses nur wenig voneinander abweichen. Auch mit der Erfahrung steht dies in Einklang: Wenn man etwa eine Münze sehr oft wirft und jeweils den Anteil der Ergebnisse für Kopf und Adler ausrechnet, so stellt man fest, daß sich diese Anteile mit der Zeit auf gewisse Werte einspielen, meistens auf Werte in der Nähe von 0,5. Daraus gewinnt nun Richard von Mises seinen Wahrscheinlichkeitsbegriff:

Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses = Grenzwert der relativen Häufigkeit dieses Ereignisses in einer unendlichen Versuchsreihe.

Auch diese Definition war der Kritik unterworfen: Der Umstand, daß man unendliche Versuchsreihen empirisch nicht herstel-

len kann, und der andere, daß der von von Mises verwendete Grenzwertbegriff nicht mit dem Grenzwertbegriff der Mathematik vereinbar ist, ließen es geraten erscheinen, sie nicht als Grundlage für eine exakte Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu verwenden.

1933 erschien dann das Buch „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ von Kolmogoroff, in dem Kolmogoroff mit seinem Axiomensystem die mathematisch wesentlichen Eigenschaften des Wahrscheinlichkeitsbegriffs losgelöst von der inhaltlichen Deutung faßt. Weiterhin wird die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses betrachtet. Sie ist eine Zahl und es gelten die folgenden Axiome:

Axiome von Kolmogoroff:

(vereinfachte Darstellung)

$P(A)$ = Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A

$$1) 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$2) P(A + B) = P(A) + P(B), \text{ wenn } A + B = \text{Disjunktion} \\ \text{und } A \text{ und } B \text{ einander ausschließen}$$

$$3) P(A_s) = 1, \text{ wenn } A_s \text{ ein sicheres Ereignis ist}$$

1. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist eine Zahl zwischen 0 und 1.
2. Wenn man als das Ereignis $A + B$ die Disjunktion definiert, also jenes Ereignis, bei dem entweder A oder B eintritt oder auch beide – sofern dies möglich ist –, so gilt für einander ausschließende Ereignisse (bei denen nicht beide gleichzeitig eintreten können), daß die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $A + B$ gleich der Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten ist. Dies gilt übrigens nicht nur für zwei, sondern auch für endlich (oder abzählbar unendlich) viele Summanden, die einander paarweise ausschließen.
3. Die Wahrscheinlichkeit eines sicheren Ereignisses – also eines Ereignisses, das eintreten muß – ist 1.

Wenn man bedenkt, wie schwierig der Wahrscheinlichkeitsbegriff erkenntnistheoretisch zu fassen ist, so ist man von der Einfachheit des mathematischen Axiomensystems überrascht. Es ist ein Axiomensystem, das nicht nur auf den Wahrscheinlichkeitsbegriff anwendbar ist; wo man etwa in der Physik eine normierte Massenbelegung betrachtet, gelten die gleichen Regeln. In der Mathematik ist dies

leicht auszudrücken: Es handelt sich um eine total-additive, normierte Mengenfunktion.

Schon Kolmogoroff hat darauf hingewiesen, daß das Charakteristische der Wahrscheinlichkeitsrechnung erst dann zum Ausdruck kommt, wenn man das Axiomensystem ergänzt durch eine Definition: die der Unabhängigkeit von Ereignissen. Anschaulich sollen dies Ereignisse sein, deren Ergebnisse einander in keiner Weise beeinflussen, etwa die verschiedenen Würfe mit einem Würfel. Ob man beim vorhergehenden Wurf eine 6 geworfen hat oder nicht, ist für das Ergebnis des nächsten Wurfs völlig irrelevant.

Für zwei solche Ereignisse A und B soll gelten, daß die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreten beider Ereignisse gleich dem Produkt der beiden Einzelwahrscheinlichkeiten ist. (In der mathematischen Betrachtungsweise gilt dies als die Definition von unabhängigen Ereignissen, weil auf die inhaltliche Deutung nicht eingegangen wird.)

Die eigentliche Wahrscheinlichkeitsrechnung ist damit in der Mathematik ausreichend und befriedigend verankert. Für die inhaltliche Deutung empfiehlt sich folgender Weg: Man akzeptiert das sogenannte Prinzip von D'Alembert. Danach braucht man mit dem Eintreten von Ereignissen, die eine sehr kleine Wahrscheinlichkeit haben, nicht zu rechnen. Daraus folgt dann: Wenn man einen Versuch sehr oft wiederholt, dann kann man davon ausgehen, daß die relative Häufigkeit eines gewissen Ergebnisses sehr nahe an der Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses liegt. Wenn man eine Münze, bei der die Wahrscheinlichkeit für den Wurf „Zahl“ $1/2$ ist, sehr oft wirft, so liegt der Anteil der Ergebnisse „Zahl“ an den Gesamtversuchen in der unmittelbaren Nähe von 0,5. Man nennt dies das „Gesetz der großen Zahl“ und gewinnt daraus die Häufigkeitsinterpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Wahrscheinlichkeit ist danach ungefähr gleich dem Anteil der Erfolge in einer langen Versuchsreihe. Die heute herrschende Auffassung der Wahrscheinlichkeitstheorie, die sogenannte objektivistische Schule, stellt an den Wahrscheinlichkeitsbegriff die kategorische Forderung, daß er einer Häufigkeitsinterpretation zugänglich sein muß.

V.

Die Aufgaben der Statistik gehen über die der Wahrscheinlichkeitsrechnung beträchtlich hinaus. Ein Beispiel möge dies verdeutlichen: Die Wahrscheinlichkeitsrechnung kann angeben, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, in einer Versuchsserie von etwa 1000 Würfen mit einer Münze genau 550mal das Ergebnis „Zahl“ und 450mal das Ergebnis „Adler“ zu erhalten. Der Statistik ist die Aufgabe gestellt, aus dem Ergebnis einer derartigen Versuchsreihe auf Eigenschaften der Münze, mit der geworfen wurde, zu schließen. Drei Fragestellungen sind möglich:

1. Kann die Münze eine symmetrische Münze sein? Sie wird durch eine Umkehrung verdeutlicht: Ist das Ergebnis etwa im Falle einer symmetrischen Münze so unwahrscheinlich, daß man sagen kann, es stünde praktisch im Widerspruch zur Annahme einer symmetrischen Münze? In diesem Fall hätte man die Annahme oder Hypothese zu verwerfen. Im anderen Fall kann man weiter mit ihr arbeiten, ohne daß sie ausdrücklich bestätigt worden ist. Dies ist ein statistischer Test für die Hypothese, daß die Münze symmetrisch ist.
2. Für den Fall, daß keine Hypothese über die Symmetrie der Münze vorlag, soll eine möglichst gute Schätzung für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Zahl“ gefunden werden. Im vorliegenden Fall ist die Lösung der Aufgabe naheliegend. Man wird 0,55 als relative Häufigkeit in der Serie verwenden, um die Wahrscheinlichkeit zu schätzen. In komplizierter gelegenen Fällen ist die Antwort nicht so einfach, man spricht dann von der Konstruktion von Schätzfunktionen für die unbekannten Größen: hier für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Zahl“. Der Engländer R. A. Fisher hat eine Theorie entwickelt, nach der man Schätzfunktionen mittels formaler Kriterien im Hinblick auf ihre Güte beurteilen kann.
3. Schätzfunktionen sind immer dann eine ungenügende Information, wenn man auch die Verlässlichkeit der Aussage kennen soll. Daher lautet eine wichtige Fragestellung: Von welchen Grenzen kann man dann annehmen, daß die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Zahl“ wirklich zwischen ihnen liegt? Diese Frage läuft darauf hinaus, einen Bereich zu konstruieren, von dem man mit einer gewissen Sicherheit behaupten kann, daß er die unbekannte Wahrscheinlichkeit für den Wurf „Zahl“ tatsächlich enthält. Man spricht dann von der Konstruktion eines Konfidenzbereichs für die unbekannte Größe. Sowohl die Theorie des statistischen Tests als auch die Theorie der Konfidenzbereiche gehen zurück auf den jetzt in Amerika lebenden Polen Jerzy Neyman und den Engländer Egon S. Pearson. Die entsprechenden Arbeiten stammen aus den Jahren 1928–1938.

An der grundsätzlichen Auffassung der herrschenden Schule hat sich bisher nichts mehr geändert. Sie sei zusammengefaßt: Es gibt zufällige Ereignisse, für die eine Wahrscheinlichkeit definiert ist, wobei das Kolmogoroffsche Axiomensystem verbunden mit der Definition für den Begriff „unabhängig“ gilt. Will man aus Beobachtungen über zufällige Größen auf die dahinter stehenden Ursachensysteme, also im wesentlichen auf die Wahrscheinlichkeiten schließen, so macht man Aussagen über Zahlen, die zwar unbekannt, aber nicht zufällig, sondern fest sind. Im vorliegenden Beispiel ist das die Wahrscheinlichkeit für den Wurf „Zahl“, die bestimmt ist durch die physikalischen Eigenschaften der geworfenen Münze. Solche Aussagen kann man mittels eines Tests, mittels einer Schätz-

funktion oder mittels eines Konfidenzintervalls machen. Sie sind dann nicht Wahrscheinlichkeitsaussagen, denn Wahrscheinlichkeitsaussagen kann man nur über zufällige Größen machen. Dementsprechend sind sie auch nicht leicht zu interpretieren. Im deutschen Sprachgebrauch wird für die Interpretation von Konfidenzintervallen oft der Hilfsbegriff „Sicherheit“ herangezogen; das ist zwar keine Wahrscheinlichkeit, doch eine Größe, die in einer abgewandelten Weise auch einer Art Häufigkeitsinterpretation zugänglich ist. Man kann aber mit ihr nicht rechnen wie mit Wahrscheinlichkeit, im Kolmogoroffschen Axiomensystem ist sie nicht enthalten.

VI.

Diese herrschende Auffassung, die objektivistische Schule, oft mit den Namen Neyman und Pearson eng verbunden, ist natürlich nicht unbestritten. Von zwei Richtungen kommt die Kritik:

Erstens, von anderen Auffassungen über den Wahrscheinlichkeitsbegriff.

Zweitens, vom Versuch, andere technische Möglichkeiten als die oben beschriebenen vorzusehen.

Zum Grundsätzlichen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs: Neben der objektivistischen Schule gibt es eine durchaus nicht unbedeutende subjektivistische Schule, der bedeutende Gelehrte, wie der Amerikaner Savage und der Italiener De Finetti, angehören. Sie gehen davon aus, daß man mit Wahrscheinlichkeitsaussagen nur beschreiben könne, wie intensiv eine bestimmte Person an das Eintreten eines in der Zukunft liegenden Ereignisses glaube. Savage schreibt ausdrücklich, man müsse die Möglichkeit zulassen, daß zwei vernünftige Personen, die in der gleichen Situation stehen, verschiedene Wahrscheinlichkeitsaussagen über den gleichen Sachverhalt machen können. Bei dieser Art von Auffassung fällt die Häufigkeitsinterpretation der Wahrscheinlichkeit weg. Sie eröffnet dafür der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein viel weiteres Anwendungsgebiet als die objektivistische Ansicht, denn sie kann sich auch mit Wahrscheinlichkeitsaussagen wie: „Morgen wird es wahrscheinlich regnen“ befassen, während jene derartige Aussagen für unzulässig hält. Es kann nämlich nur entweder morgen regnen oder morgen nicht regnen; eine lange Versuchsreihe ist hier nicht denkbar.

Die dritte Richtung der Wahrscheinlichkeitstheorie wird mit so illustren Namen wie Laplace, Jeffreys, Keynes, Reichenbach und Carnap in Zusammenhang gebracht. Für sie ist Wahrscheinlichkeit eine Eigenschaft, die Schlüssen von ganz bestimmten Prämissen auf ganz bestimmte Konklusionen zukommt. Es ist für sie also nicht sinnvoll zu sagen: „Wahrscheinlich wird es morgen regnen“, sondern nur: „Auf Grund dieser und jener Beobachtungen von heute kommt der Aussage, daß es morgen regnen wird, diese oder jene Wahrscheinlichkeit zu“.

Diese Auffassung, die oft als logische oder auch notwendige Auffassung bezeichnet wird, steht zwischen der objektivistischen und der subjektivistischen. Von der subjektivistischen Richtung wird sie dadurch getrennt, daß sie interpersonelle Unterschiede der Wahrscheinlichkeitsbeurteilungen nicht zuläßt – genauer gesagt, nur dann zuläßt, wenn die verschiedenen Personen von verschiedenen Voraussetzungen ausgehen. In bezug auf das obige Beispiel würde das bedeuten: Für jemanden, der nicht nur die Beobachtungen der Erdstationen, sondern auch die eines Wettersatelliten zur Verfügung hat, kann die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es morgen regnet, eine andere sein. Was darüber hinaus noch an Unterschieden trotz gleicher Informationsbasis verbleibt, geht dann auf die individuellen Schätzungen für die gleiche Wahrscheinlichkeit zurück. Es ist dann dieselbe Situation, wie wenn zwei Personen die Entfernung zwischen zwei Orten verschieden schätzen.

Der Unterschied gegenüber der objektivistischen Auffassung beruht im wesentlichen darauf, daß die logische – oder besser gesagt, erkenntnistheoretische – Auffassung auch Aussagen ermöglicht, die sich auf einmalige Vorgänge beziehen. Es muß allerdings zugegeben werden, daß es in vielen Fällen nicht möglich ist, Wahrscheinlichkeitsaussagen über derartige Schlüsse auf rationalem Wege zu gewinnen. Aber in anderen und sehr wichtigen Fällen, etwa jenen Problemen, die bei der objektivistischen Auffassung nicht systemadäquat beantwortet werden konnten, ermöglicht – wie später zu zeigen sein wird – die erkenntnistheoretische Auffassung Aussagen, die im Prinzip gleichrangig sind wie die im Falle eines wiederholbaren Versuchs.

Als ein weiterer wesentlicher Unterschied zur objektivistischen Auffassung galt bisher, daß bei der erkenntnistheoretischen Auffassung eine Häufigkeitsinterpretation der Wahrscheinlichkeit nicht möglich ist. Auch hier wird zu zeigen sein, daß bei geeigneter Formalisierung der Einwand wegfallen kann. Charakteristisch für die erkenntnistheoretische Richtung ist überhaupt, daß ihre Grundposition kaum angegriffen wird. Sowohl ihre Anhänger, wie Keynes und Carnap, als auch die anderen Schulen drücken dagegen oft ihr Bedauern aus, daß ein geschlossenes Konzept für diese Auffassung bisher nicht erarbeitet werden konnte. Als Beispiel sei wieder Savage angeführt, der in seinem Buch „The Foundations of Statistics“ schreibt: „Wie bereits angedeutet, gibt es vom Standpunkt der personalistischen¹⁾ Auffassung keine grundsätzlichen Einwände gegen die Konstruktion einer notwendigen Auffassung, aber es ist mein Eindruck, daß diese Möglichkeit bis jetzt nicht in die Tat umgesetzt wurde und, obwohl ich nicht imstande bin, Gründe dafür anzugeben, glaube ich, daß diese Möglichkeit überhaupt nicht real ist.“

¹⁾ d. h. subjektivistischen (d. V.)

Dieser Vortrag will zeigen, daß die Möglichkeit einer geschlossenen Konzeption für diese Auffassung durchaus real ist.

Auch im rein methodischen Bereich gab es Ansätze, die sich von denen der Neyman-Pearsonschen Theorie unterscheiden. Hier ist vor allem das Konzept von R. A. Fisher zu nennen, der in verschiedenen Arbeiten zwischen 1930 und 1960 den Versuch unternahm, mit Hilfe der sogenannten Fiduzialwahrscheinlichkeit Wahrscheinlichkeitsaussagen dort zu ermöglichen, wo nach der Theorie von Neyman und Pearson nur die Konstruktion von Konfidenzintervallen möglich ist. Der Ansatz Fishers war heuristisch, es fehlte die exakte Herleitung seiner Aussagen aus einem geschlossenen Axiomensystem, wie dem von Kolmogoroff. Bei Neyman und Pearson sind dagegen alle Aussagen exakt hergeleitet, nur sind sie nicht im Rahmen des Axiomensystems deutbar. In verschiedenen Arbeiten aus der Schule Neymans wurden Widersprüche zwischen den Ergebnissen nach beiden Methoden nachgewiesen. Auf der anderen Seite gibt es aber viele Beispiele, in denen die Ergebnisse nach beiden Konzepten übereinstimmen. Ein entscheidender Nachteil des Konzepts von Fisher ist jedoch neben dem Mangel an Einordnung in ein Axiomensystem auch der Umstand, daß eine Häufigkeitsinterpretation des Begriffs der Fiduzialwahrscheinlichkeit nicht möglich ist. Aus diesen Gründen hat die Fishersche Theorie der Fiduzialwahrscheinlichkeit heute nur noch wenige Anhänger.

VII.

Aus dieser Situation heraus stellt sich heute die Aufgabe, die Grundlage des Wahrscheinlichkeitsbegriffes neu zu überdenken. Man hat sich zu fragen, ob man Fortschritte in der Richtung auf eine breitere Begriffsbestimmung erzielen kann, ohne wesentliche Vorteile des bisherigen – objektivistischen – Konzepts aufgeben zu müssen. Dabei muß man entscheiden, welche Eigenschaften des objektivistischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs man als wesentlich betrachtet.

Ich werde im folgenden mein Konzept zur Weiterentwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie skizzieren, ohne es hier in den Einzelheiten ausführen zu können. Es beruht auf der Auffassung, daß zwei Eigenschaften des Wahrscheinlichkeitsbegriffs von Kolmogoroff wesentlich sind und daher nicht aufgegeben werden dürfen:

1. Die Einordnung in die moderne Mathematik.

Sie muß dadurch gewährleistet bleiben, daß die mathematischen Eigenschaften des Begriffs durch ein widerspruchsfreies Axiomensystem festgelegt sein müssen.

2. Die Möglichkeit einer Häufigkeitsinterpretation der Wahrscheinlichkeiten, weil sie das einzige bisher bekannte Gedankenmodell darstellt, das eine Erläuterung des Begriffs ermöglicht und somit gewährleistet, daß die Vorstellungen verschiedener Personen

über die Bedeutung von Wahrscheinlichkeitsaussagen einander angeglichen werden können. Damit stellt sich die Aufgabe wie folgt:

Ein Axiomensystem ist zu entwickeln, das

1. das Axiomensystem von Kolmogoroff als einen Sonderfall enthält;
2. Wahrscheinlichkeiten nicht Ereignissen, sondern Schlüssen von einer Prämisse auf eine Konklusion zuordnet;
3. die Häufigkeitsinterpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ermöglicht;
4. in jenen Fällen, in denen die Fishersche Theorie und die Neyman-Pearsonsche Theorie die gleichen Ergebnisse liefern, Wahrscheinlichkeitsaussagen in beiden Richtungen ermöglicht, also etwa bei einer Stichprobe aus einer Gesamtheit sowohl dem Schluß von der Gesamtheit auf die Stichprobe als auch dem Schluß von der Stichprobe auf die Gesamtheit eine Wahrscheinlichkeit zuordnet.

Wie in vielen Fällen der Wissenschaftsgeschichte zeigt es sich auch hier, daß man gleichsam als Äquivalent für die angestrebten Vorteile eine Denkgewohnheit aufgeben muß. Im vorliegenden Fall ist es die Denkgewohnheit, daß die Wahrscheinlichkeit stets eine Zahl ist. Es muß stattdessen zugelassen werden, daß eine Zahlenmenge – etwa das Intervall zwischen 0,2 und 0,3 – als Wahrscheinlichkeit für den Schluß von der Aussage B auf die Aussage A auftritt. Es wird aber weiterhin gefordert, daß diese Zahlenmenge ganz im Intervall zwischen 0 und 1 liegt.

Diese Erweiterung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes von einer Zahl zu einer Zahlenmenge wird nahegelegt, sobald man versucht, die Fishersche Fiduzialwahrscheinlichkeit zu formalisieren. Daher findet sich ein ähnlicher Ansatz bereits bei dem Amerikaner Henry Kyburg jr. in seinen Arbeiten aus den Jahren 1961 bis 1964. Allerdings ist Kyburgs Konzept an einer entscheidenden Stelle inkonsequent und führt nach seinen eigenen Aussagen nicht zu brauchbaren Einzelergebnissen. Seine Betrachtungsweise ist vorwiegend philosophischer, nicht dagegen mathematischer Natur.

In der Tat führt die Definition der Wahrscheinlichkeit als eine Zahlenmenge – im Normalfall entweder eine Einzelzahl oder ein Intervall – zu Problemen mathematischer Art. Man benötigt ein System von Rechenvorschriften für algebraische Operationen mit derartigen Mengen. Dies führt zu analogen Überlegungen wie eine Systematisierung des Rechnens mit ungenauen oder fehlerhaften Größen: Man könnte von einer „Spielraum-Theorie“ sprechen, weil statt einzelner Zahlen Spielräume für Zahlen verknüpft werden. Ich halte es für möglich, daß dies auch zu interessanten inner-mathematischen Fragestellungen Anlaß geben könnte.

VIII.

Ich habe Ihnen nach einer Darstellung der Statistik als Wissenschaft in ihrer geschichtlichen Entwicklung den heutigen Stand der Diskussionen über die Grundprobleme der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Mathematischen Statistik vorgeführt und dann einen Versuch beschrieben, mittels eines neuen Axiomensystems einen Wahrscheinlichkeitsbegriff einzuführen, der Wahrscheinlichkeiten nicht Ereignissen, sondern Schlüssen zuordnet, aber einer Häufigkeitsinterpretation zugänglich ist.

Ich danke Ihnen für Ihre Aufmerksamkeit.