FRANKFURTER UNIVERSITÄTSREDEN
Heft 38

VITTORIO KLOSTERMANN FRANKFURT AM MAIN
1965

EUKLID

aus der Sicht der mathematischen und der naturwissenschaftlichen Welt der Gegenwart

Rede beim Antritt des Rektorats
gehalten von

Dr. rer. nat. Wolfgang FRANZ
o. Prof. für Reine Mathematik

VITTORIO KLOSTERMANN FRANKFURT AM MAIN
1965

EUKLID

aus der Sicht der mathematischen und der naturwissenschaftlichen Welt der Gegenwart

Um das Jahr 300 vor Christi Geburt schrieb Euklid in Alexandria sein berühmtes Werk „Die Elemente", in dem er die Mathematik seiner Zeit in einer meisterhaften Darstellung zusammenfasste. Sein Werk hatte einen beispiellosen Erfolg, es wurde sozusagen ein „bestseller". Es war bis in die Neuzeit hinein neben der Bibel das meistgedruckte Werk der Weltliteratur, es wurde in alle Sprachen übersetzt, in den Schulen war Euklid, teils im Original, teils in Bearbeitungen, jahrhundertelang das einzige Lehrbuch der Mathematik; in England wurde „Euclid" schlechthin die Bezeichnung für Mathematik. Der Einfluß Euklids auf die Entwicklung der Mathematik und auf die Nachbarwissenschaften Astronomie, Physik und Philosophie war enorm. Es soll die Aufgabe dieses Vortrages sein, die Entwicklungslinien dieses Einwirkens nachzuzeichnen und damit die Bedeutung des Werkes vom modernen Standpunkt aus zu charakterisieren.

Wir wollen zunächst das Werk selbst etwas genauer betrachten. Es ist more geometrico geschrieben, in jenem charakteristischen, strengen Stil, der so viele Bewunderer und Nachahmer gefunden hat, der z. B. Spinoza so tief beeindruckt hat. Es folgen einander jeweils Satz, d. h. Lehrsatz, und Beweis. Jeder Satz wird aus den vorangehenden Sätzen abgeleitet; die Ableitungen geschehen in knappester Form, mit äußerster logischer Präzision und Klarheit, kein Wort ist überflüssig, kein Glied der Schlußkette bleibt unerwähnt. Die Beweise schließen mit der Formel „quod erat demonstrandum". – Dieser Stil liest sich nicht leicht, er fordert vom Leser gespannte Aufmerksamkeit und eigenes Mitarbeiten; anderenfalls kann leicht der Eindruck entstehen, daß man durch unverständliche Winkelzüge und schlaue Tricks des Autors in einem „Mausefallenbeweis" überrumpelt werden soll.

Machen wir uns etwas ausführlicher klar, wie man zu einem wirklichen

Verständnis eines solchen Werkes gelangt. Man kann es sicher nicht in einem Zuge lesen. Man wird vielmehr zunächst von den Definitionen und von dem Inhalt der Sätze Kenntnis nehmen, ohne sich um die schwierigen Beweise zu kümmern, um so zunächst eine Vorstellung von den zu erreichenden Zielen zu gewinnen. Dann wird man zu einem Schritt-für-Schritt-Studium der Beweise übergehen und dabei versuchen, sich von ihrer Zweckmäßigkeit zu überzeugen. Dann folgt eine genauere Untersuchung der gegenseitigen Abhängigkeiten unter den Sätzen und der Gliederung des Gesamtaufbaus. So gelangt man zu einem Begreifen der Struktur des Werkes, durch das man befähigt wird, nicht nur die Gedanken des Autors an jeder Stelle nachzuvollziehen, sondern auch seine Gedankenführung richtig zu würdigen, etwa zu verstehen, warum an einer Stelle so und nicht anders vorgegangen werden muß, oder sogar selbständige kleinere und größere Änderungen im Aufbau vorzunehmen. Anstelle des einseitig vorwärts gerichteten logischen Flusses bei der ersten Lektüre hat man nun ein Netz von gegenseitigen logischen Abhängigkeiten in der Hand. Während es vorher so schien, als ob man in einer unbekannten Gegend durch einen zwar sehr sachkundigen, aber leider etwas wortkargen Führer auf unübersichtlichen Wegen auf einen Gipfel geführt würde, hat man jetzt eine Übersicht über das ganze Gebiet gewonnen und ist in der Lage, sich frei darin zu bewegen. Man erkennt, daß für eine solche Theorie nicht so sehr die zu beweisenden Tatsachen, sondern fast mehr noch das logische Gerüst, das Netz der gegenseitigen Abhängigkeiten wichtig ist. Von dieser Auffassung ist nur noch ein kleiner Schritt zu der heute so genannten axiomatischen Methode, die den eigentlichen Kern des Euklidschen Aufbaus bildet und von der gleich ausführlich zu sprechen ist.

Vorher habe ich aber noch auf einen anderen, ebenso wichtigen wie auf den ersten Blick erstaunlichen Umstand aufmerksam zu machen. Die Grundlagenfragen der Geometrie, etwa die Frage nach dem Wesen der Punkte und Geraden, werden bei der soeben geschilderten ausführlichen Lektüre des Euklid von Schritt zu Schritt weniger bedeutsam. Wenn es vor allem auf das ankommt, was ich das Netz der gegenseitigen Abhängigkeiten genannt habe, so schadet es verhältnismäßig wenig, wenn nicht ausführlich auf die Frage eingegangen wird, „Was

sind letzten Endes die Punkte, und was sind die Geraden der Geometrie?" Andererseits aber möchte man natürlich in einem grundlegenden geometrischen Werk diese Frage auch beantwortet sehen, und zwar mit derselben Klarheit und endgültigen Schärfe, die das Buch sonst auszeichnen. Wie steht es damit bei Euklid? Was man jedenfalls bei ihm nicht findet, sind nichtssagende Erklärungen etwa derart, daß Punkte und Geraden durch Abstraktion oder Idealisierung aus Sandkörnern oder Lichtstrahlen zu gewinnen seien, wie man das gelegentlich zu hören bekommt. Daß man aber auch keine positive Antwort, jedenfalls keine strengen Maßstäben genügende Antwort bei Euklid findet, hängt mit der Überlieferung des Textes zusammen. Der Text ist, wie man es nach mehr als 2000 Jahren nicht anders erwarten kann, nicht unverändert auf uns gekommen, er ist im Laufe der Zeit verstümmelt und durch Mißverständnisse entstellt worden. Allerdings mit Unterschieden: Die inneren Teile des Werkes, die eigentlichen Sätze und ihre Beweise, sind verhältnismäßig unempfindlich gegen Korrumpierung. Bei einem so klaren und lichtvollen Beweis wie dem des Satzes von Pythagoras im I. Buche Euklids kann man eben kein Wort hinzufügen oder weglassen, ohne den harmonischen Aufbau offensichtlich und empfindlich zu stören. Aber die Teile des Werkes, die nicht so stark logisch verzahnt und nicht so vielfältig im Netz der Abhängigkeiten gebunden sind, erweisen sich naturgemäß als anfälliger gegenüber Änderungen. Das gilt besonders von den einleitenden Grunderklärungen, den κοιναὶ ἔννοαι und von den sogenannten Axiomen, mit denen jedes der 13 Bücher des Euklid beginnt und die in der vorliegenden Form sicher nicht alle von Euklids Hand stammen. Hier bietet sich ein weites Feld, eine willkommene und vielbenutzte Gelegenheit für Interpreten und Kommentatoren, die Verbesserungen am Urtext anzubringen oder ihre eigenen mathematischen, physikalischen oder philosophischen Ideen zusammen mit dem Werk eines wahrhaft großen Mannes in ein besseres Licht zu rücken wünschen.

Wenn also in der uns vorliegenden Fassung des Euklid diejenigen Teile, die die Grundlagen betreffen, offensichtlich korrumpiert sind, so kann man doch, ähnlich wie bei einer halbzerstörten antiken Tempel-

anlage, eine Rekonstruktion versuchen. In diesem Sinne möchte ich unter Auslassung aller historischen und sachlichen Zwischenstufen sogleich eine moderne Wendung der Euklid'schen Ideen angeben, die als eine sinngemäße Ergänzung, als Durchführung, ja als Vollendung des Euklid angesehen werden kann. Ich meine das von David Hilbert zu Beginn dieses Jahrhunderts aufgestellte axiomatische System der Geometrie.

Diese Hilbertsche Idee ist in ihrer Verbindung von ganz einfachen mit sehr tief liegenden Gedanken nicht ganz leicht aufzufassen. Ich bitte Sie daher für einen Augenblick um besondere Aufmerksamkeit. Hilbert beginnt wie folgt: Man denke sich zwei Sorten von irgendwelchen Dingen; die Dinge der ersten Sorte nennen wir Punkte, die der zweiten Sorte nennen wir Geraden. Man denke sich ferner eine Beziehung, die zwischen einem dieser Punkte und einer dieser Geraden bestehen oder auch nicht bestehen kann. Wir nennen sie die Inzidenzbeziehung und sagen: der Punkt liegt auf der Geraden, oder die Gerade geht durch den Punkt; kurz und symmetrisch ausgedrückt: Punkt und Gerade sind inzident. Wir denken uns also neben unseren Punkten und Geraden eine Vorschrift, die für je einen dieser Punkte und je eine dieser Geraden angibt, ob sie inzident sind oder nicht. Diese Inzidenzrelation soll aber nicht ganz willkürlich sein, sondern vielmehr gewisse Anforderungen, die sogenannten Axiome, erfüllen. Es ist bei Hilbert ein reichliches Dutzend von Axiomen, von denen ich hier nur das erste angebe. Es lautet:

Axiom 1: Zu je zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, die mit beiden inzident ist, d.h. also genau eine Gerade, die durch die beiden Punkte geht.

Aus den Axiomen kann man nun auf rein logische Weise Folgerungen ableiten. Zum Beispiel kann man ohne weiteres den Satz folgern: Zwei verschiedene Geraden haben höchstens einen Punkt gemeinsam. Der Beweis liegt auf der Hand: Hätten die beiden Geraden zwei Punkte gemeinsam, so betrachte man diejenige einzige Gerade, die nach Axiom 1 durch die beiden Punkte geht. Sie muß mit den beiden im Satz genannten Geraden identisch sein, also müssen diese beiden miteinander identisch sein. – Weiter kann man nacheinander alle Sätze des Euklid folgern, und zwar genau in der Weise, wie es im Euklid steht.

Allerdings haben die Sätze nun einen ganz anderen Sinn als bei naiver Auffassung. Der Satz von Pythagoras z. B. ist nicht mehr ein Satz über die uns umgebende räumliche Welt, sondern eine Folgerung aus unseren selbstgesetzten Axiomen, ohne Beziehung auf den Raum. Das ganze Hilbertsche axiomatische System ähnelt in vieler Hinsicht einem Spiel, etwa einem Schachspiel. Die Figuren des Schachspiels entsprechen den Punkten und Geraden. Die Namen Bauer, König usw. der Schachfiguren bezeichnen ebensowenig wirkliche Bauern oder einen wirklichen König, wie die Hilbertschen sogenannten Punkte und Geraden räumliche Punkte oder Geraden bezeichnen. Die Ausgangsstellung der Figuren im Schachspiel entspricht den Axiomen, ein Zug im Schachspiel entspricht einem logischen Schluß in einem Beweis. Eine Schachpartie entspricht einem Beweis, und die Endstellung, etwa der Sieg, entspricht einem geometrischen Satz, der auf diese Weise bewiesen wurde. Das Schachspiel als solches, als Spiel neben anderen, wie Dame, Mühle usw., entspricht der Hilbertschen Geometrie.

Dies also ist das Hilbertsche axioamtische System. Beim ersten Kennenlernen wird man vielleicht eine gewisse Ernüchterung empfinden. Man wird vielleicht fragen: Wenn die Geometrie nichts anderes ist als ein Schachspiel mit selbstgeschaffenen Figuren (das sind ja die Punkte und Geraden) und mit selbstgeschaffenen Spielregeln (das sind ja die Axiome), wie kann man sie dann auf die empirische Welt anwenden? Und ist mit einem solchen Spiel schon das letzte Wort über den erkenntnistheoretischen Charakter der geometrischen Grundbegriffe gesagt? Ich komme auf diese Fragen ausführlich zurück. Zunächst verweilen wir noch bei dem Hilbertschen System. Um jedes Mißverständnis auszuschließen stellen wir auch hier, entsprechend wie oben, die Frage: „Was sind Punkte, was sind Geraden der Hilbertschen Geometrie?“ Die Antwort muß lauten: Weder die Punkte noch die Geraden lassen sich für sich allein erklären. Sie sind gemeinsam die Grundbegriffe des Hilbertschen axiomatischen Systems, sie sind durch die Axiome, wie man sagt, implizit definiert; sie haben die Eigenschaften, die in den Axiomen verzeichnet sind und keine anderen.

Kehren wir einen Augenblick zurück zu Euklid. Für den erfahrenen Mathematiker, den Kenner Euklids und der modernen Mathematik kann kein vernünftiger Zweifel darüber bestehen, daß Euklid seine

„Elemente“ im Sinne einer solchen Axiomatik gemeint hat. Die gesamte Anlage des Werkes zeigt dies in allen Einzelheiten; in anderer Weise läßt sich die kunstvolle und sehr verzweigte Gedankenführung der 13 Bücher gar nicht erklären. Wir sprechen daher im folgenden auch von dem Hilbert-Euklidschen axiomatischen System.

Um Ihnen die axiomatische Methode noch näher zu bringen und ihre charakteristischen Eigenschaften besser erläutern zu können, möchte ich noch ein zweites Beispiel eines axiomatischen Systems kurz entwickeln. War das erste Beispiel eine Axiomatisierung der elementaren Geometrie, so orientiert sich dies zweite Beispiel an der Arithmetik und am Rechnen mit Zahlen. Es handelt sich um die sogenannte Gruppentheorie. Wir denken uns eine Menge von irgendwelchen Dingen. Zwischen diesen Dingen sei eine Operation festgelegt, d. h. es sei eine Vorschrift gegeben, die zu je zwei Dingen a und b ein drittes $c = ab$ bestimmt. Das Ding $ab = c$ nennen wir auch das Produkt von a und b, obwohl es schon deswegen durchaus nicht das übliche Produkt ist, weil a und b keine Zahlen sind, die man multiplizieren könnte. Unsere Produkt-Vorschrift soll nicht ganz willkürlich sein, sondern folgenden drei Axiomen genügen:

Axiom 1: Es ist stets $(ab)\,c = a\,(bc)$.

Axiom 2: Es gibt ein spezielles Ding e, das sogenannte neutrale Ding, für das $ae = ea = a$ gilt, um welches a auch immer es sich handelt.

Axiom 3: Zu jedem Ding a gibt es ein Element x mit $ax = xa = e$, ein Ding x also, das gewissermaßen ein reziprokes Ding zu a ist.

Eine solche Menge von Dingen zusammen mit einer solchen Produkt-Vorschrift, die diesen drei Axiomen genügt, heißt eine Gruppe; zusammen mit den sämtlichen logischen Folgerungen aus den Axiomen ergibt sich das axiomatische System der Gruppentheorie. Beispiele von Gruppen bekommt man etwa in den positiven Zahlen mit der gewöhnlichen Multiplikation als Gruppenoperation oder aber in den ganzen Zahlen mit der Addition als Gruppenoperation.

Dieses zweite Beispiel eines axiomatischen Systems, die Gruppentheorie, weist gegenüber unserem ersten Beispiel, der Hilbertschen Axiomatik der Geometrie, einige wesentliche Unterschiede auf. Zu-

nächst ist in die Augen fallend, daß es erheblich einfacher ist als die Hilbertsche Axiomatik, es wird ja nur e i n System von Grundelementen vorausgesetzt, und es werden nur drei Axiome gefordert, während wir bei Hilbert gar nicht alle Axiome aufzählen konnten. Nichtsdestoweniger ist die Gruppentheorie zu einer wichtigen und weit ausgebauten Teildisziplin der Mathematik geworden. Es ist ein bemerkenswerter Umstand, daß die axiomatische Methode sich zuerst an einem so relativ komplizierten Beispiel wie der Hilbertschen Axiomatik entwickelt hat. Wichtiger aber ist die Tatsache, daß die Gruppentheorie polymorph ist im Gegensatz zur monomorphen Hilbertschen Geometrie. Das bedeutet: Es gibt viele wesentlich verschiedenen Beispiele von Gruppen – zwei haben wir schon eben kennengelernt – während es nur eine, genauer gesagt, im wesentlichen nur eine Hilbertsche Geometrie gibt. Wir werden noch sehen, daß die Polymorphie eine besonders fruchtbare Eigenschaft eines axiomatischen Systems ist.
Fassen wir zusammen, was wir über die axiomatische Methode festgestellt haben: Es gehören dazu gewisse Grundbegriffe (Punkte und Geraden bei Hilbert, die zugrundegelegten „Dinge" in der Gruppentheorie) und gewisse Relationen (Inzidenzen bei Hilbert, Produkte in der Gruppentheorie), ferner eine Reihe von Axiomen. Die Gesamtheit dieser Gegebenheiten zusammen mit den sämtlichen logischen Folgerungen aus den Axiomen nennt man heute eine axiomatische Struktur oder eine mathematische Struktur oder auch kurz eine Struktur. Ich werde im folgenden das Wort Struktur ausschließlich in diesem Sinne gebrauchen. Unsere beiden Beispiele, das Hilbertsche axiomatische System und die Gruppentheorie werden also in diesem Sinne als die Hilbertsche Struktur und die gruppentheoretische Struktur bezeichnet; die Hilbertsche Struktur ist im wesentlichen mit der euklidischen Geometrie identisch.

Dieser Begriff der axiomatischen Struktur durchdringt heute die gesamte Mathematik. Es ist kaum möglich, an dieser Stelle eine Vorstellung davon zu geben, in welchem Ausmaße das der Fall ist. Hunderte von Strukturen sind aufgestellt und durchforscht worden und haben ihre Bedeutung erwiesen. Ich will versuchen, am Beispiel der Geometrie

die Bedeutung des Nebeneinanders und des Ineinandergreifens der verschiedenen Strukturen anzudeuten. Läßt man unter den Axiomen Euklids bzw. Hilberts das sogenannte Parallelenaxiom fort, so ergibt sich eine polymorphe Struktur, die sogenannte absolute Geometrie. Viele wohlbekannte geometrische Sätze gehören bereits dieser absoluten Geometrie an, während andere wesentlich vom Parallelenaxiom abhängen. Nimmt man anstelle des Parallelenaxioms sein kontradiktorisches Gegenteil als Axiom, so ergibt sich eine andere Struktur, die hyperbolische Geometrie. Beide Geometrien, die euklidische wie die hyperbolische, haben das Gebiet der absoluten Geometrie gemeinsam. Es resultiert eine Art Schichtung der geometrischen Sätze, eine Einteilung je nach Zugehörigkeit zu den verschiedenen Strukturen, die ein neues Licht auf die einzelnen geometrischen Tatsachen wirft. Dies Prinzip der Schichtung ist inzwischen ein überall geläufiges Hilfsmittel mathematischer Forschung geworden. – Eine andere geometrische Struktur, die vielleicht manchem noch aus der Schulzeit bekannt ist, ist die projektive Geometrie. – Wenn man anstelle der euklidischen Ebene gekrümmte Flächen als Schauplatz der Geometrie zugrundelegt, so kommt man zu wieder anderen geometrischen Strukturen, solche in denen es keine Geraden, aber dafür andere krumme kürzeste Verbindungslinien, die geodätischen Linien gibt. – Eine Verallgemeinerung dieser Strukturen sind die Riemannschen Geometrien, die wahrscheinlich am besten geeignet sind, die uns umgebende empirische Welt im großen zu beschreiben. – Weitere Beispiele von geometrischen Strukturen bilden die vielen verschiedenen Phasenräume der Geometrie und Physik. – Die allgemeinsten auf die Geometrie zurückgehenden Strukturen nennt man topologische Strukturen; in ihnen gibt es weder Geraden noch Längen, Flächen noch Winkel. Nichtsdestoweniger haben sie durch eine axiomatische Analyse des Nachbarschafts- und Umgebungsbegriffes unsere Kenntnis über den Raumbegriff in fruchtbarer Weise erweitert. – Ein geometrischer Satz kann, wie wir es schon sahen, durchaus in mehreren verschiedenen Strukturen auftreten. Durch eine solche Betrachtung von verschiedenen Seiten her erhält er neues Leben und eine vertiefte Bedeutung. Das Gesamtgebiet der Geometrie erhält durch solche Auflösung in Strukturen eine Gliederung und Schichtung, die neuartige und weitreichende Erkenntnisse ermöglichen.

Genau in dem gleichen Sinne ist heute die gesamte Mathematik und sind sogar Teile anderer Wissenschaften, wie z. B. Physik, Chemie, Nationalökonomie, durch axiomatische Strukturen charakterisierbar. Diese Strukturen überdecken das Gesamtgebiet der Mathematik, überschneiden sich gegenseitig und sind aufeinander anwendbar. Die Mathematik stellt sich somit dar als eine Schatzkammer von mehr oder weniger weit erforschten Strukturen, sozusagen als ein riesiger Vorrat von gesundem Menschenverstand. Er steht zwar jederzeit zur Anwendung auf praktische Probleme bereit, ist aber selbst von allen Anwendungen, ja fast von allen Beziehungen zur Umwelt unabhängig allein auf sich selbst gegründet, ein Bau allein zu Ehren des menschlichen Geistes errichtet, um ein Zitat von Leopold Kronecker zu gebrauchen, eine reine Geisteswissenschaft, reiner und unabhängiger als jede andere Wissenschaft, die diesen Namen führt.

Durch Unterscheidung der verschiedenen Strukturen nach der Art ihrer Axiome kommt man zu einer neuen Gliederung des Gesamtbereichs der Mathematik, die gegenüber der alten klassischen Einteilung in Algebra, Analysis und Geometrie den Vorteil einer sachlichen, inneren Begründung hat. Man unterscheidet zunächst: (1) algebraische Strukturen, (2) topologische Strukturen, (3) Ordnungsstrukturen. Algebraische Strukturen sind durch algebraische Operationen, wie wir sie bei der Gruppentheorie kennengelernt haben, charakterisiert. Topologische Strukturen entsprechen in einem gewissen, allerdings stark erweiterten Sinne der Geometrie. Ordnungsstrukturen möchte ich der Kürze wegen hier beiseite lassen. Neben den hiermit aufgeführten Grundstrukturen gibt es zusammengesetzte Strukturen. Ein Beispiel sind die topologischen Gruppen, die einerseits Gruppen sind, denen andererseits aber auch eine geometrisch-topologische Struktur aufgeprägt ist. Zur Untersuchung topologischer Gruppen stehen zunächst die Struktur der Gruppentheorie und die Struktur der topologischen Räume in vollem Umfang zur Anwendung zur Verfügung; wesentlich neue Tatsachen aber ergeben sich durch das axiomatisch festgelegte Zusammenspiel dieser beiden Strukturen. Die durch dieses Beispiel angedeutete Ordnungs- und Vereinheitlichungstendenz, die sich durch den Strukturbegriff ergibt, hat sich als sehr folgenreich und fruchtbar erwiesen. Sie wirkt den sonst überhandnehmenden Spezialisierungs- und Isolierungstendenzen,

die die mathematische Forschung so wie die Arbeiten am babylonischen Turm immer weiter auseinanderfallen ließen, erfolgreich entgegen. Wie groß dieser Erfolg ist, läßt sich heute vielleicht am einfachsten an einem Werke ablesen, das die praktische Konsequenz aus dieser ganzen Entwicklung zieht, ich meine das Werk von Nicolas Bourbaki. Es unternimmt die Aufgabe, die gesamte Mathematik unter einheitlichen Gesichtspunkten nach axiomatischen Strukturen darzustellen oder besser gesagt, neu wieder aufzubauen. Der Verfasser Bourbaki ist übrigens kein einzelner Mensch, sondern unter diesem Pseudonym verbirgt sich eine Gruppe von französischen Mathematikern, die bemerkenswerterweise anonym zu bleiben wünschen und die diesem Monumentalwerke einen großen Teil ihrer Energie und Zeit gewidmet haben. Es dürfte klar sein, daß der Bourbaki etwas völlig anderes ist als eine der früher üblichen Enzyklopädien. Der unmittelbare und noch mehr der indirekte Einfluß dieses Werkes auf die gegenwärtige Mathematik ist sehr groß und reicht übrigens jetzt schon bis in die Neuordnung der Schulmathematik hinein.

Der Hauptvorteil der axiomatischen Methode ist natürlich die große Allgemeinheit, die sie den Sätzen der Strukturen verleiht. Zum Beispiel: Wenn immer bei mathematischen Untersuchungen eine Gruppe auftritt – und das ist sehr häufig der Fall – so steht sofort der ganze Vorrat der Sätze der Gruppentheorie zur Anwendung bereit. Das ist nicht nur ein arbeitssparender, ein ökonomischer Vorteil, sondern auch ein sachlicher; der Mathematiker gewinnt einen wesentlich vertieften Einblick in die Materie, wenn er eine Schlußweise nicht nur eben für einen vorliegenden Zweck benutzt, sondern sie als eine allgemeine Methode einer zugrundeliegenden gruppentheoretischen Teilstruktur erkennt. Ich erwähne ein besonders markantes Beispiel. Der Marburger Mathematiker Kurt Hensel, mein verehrter Lehrer, entdeckte in der Theorie der ganzen Zahlen, einer schon im Altertum behandelten, klassischen Domäne diskontinuierlicher Forschung unerwarteterweise eine versteckte topologische, also geometrische Struktur, die ihn zu seiner berühmten und anwendungsreichen Theorie der padischen Zahlen führte. Selbstverständlich waren solche „Querverbindungen" zwischen verschiedenen oft weit auseinander liegenden Gebieten der Mathematik auch schon früher bekannt und wurden viel benutzt. Die Strukturauf-

fassung jedoch geht darauf aus, solche gegenseitigen Anwendungen grundsätzlich zu erfassen und jede Schlußweise wenn möglich nur einmal, und zwar nur an der ihr gemäßen Stelle innerhalb der ihr gemäßen, möglichst allgemeinen Struktur zu verwenden.

Die axiomatische Methode erlaubt ferner eine Klärung der Grundlagenfragen, die eingangs angeschnitten wurden, jedenfalls so weit sie die Mathematik angehen. Stellen wir von unserem jetzigen Standpunkt aus noch einmal die Frage „Was sind Punkte und was sind Geraden?" Nun, sie sind in jeder axiomatischen Struktur etwas anderes, sie werden jeweils durch die Axiome der zugrunde gelegten Struktur implizit definiert, wie es vorhin beschrieben wurde. Es bleibt dem Ermessen des Forschers, wenn man will, seiner Willkür überlassen, welche Grundbegriffe er Geraden nennen will, und es bleibt ihm überlassen, zu entscheiden, welche Eigenschaften er für seine Geraden durch seine Axiome postulieren will. Ob einem Grundbegriff in einer Struktur der Name „Gerade" zuerkannt werden soll oder nicht, ist verhältnismäßig gleichgültig gegenüber der tiefliegenden und entscheidungsschweren Frage der Auswahl und der genauen Formulierung der Axiome. Wir nähern uns hier der erkenntnistheoretischen und philosophischen Seite dieser Probleme, über die ich mich aus Gründen mangelnder Kompetenz etwas zurückhaltend ausdrücken möchte. Sicher scheint es mir zu sein, daß die Dinge von philosophischer Seite fast durchweg zu starr und dogmatisch betrachtet werden. Wie soll man z. B. einsehen, welche unter den Axiomen Hilberts oder Euklids vom Standpunkt eines strengen Kantianers aus als der Natur des menschlichen Verstandes immanent anzusehen sind? Euklid ist in dieser Frage viel elastischer, sozusagen viel moderner. Er handhabt die axiomatische Methode mit großer Freiheit und souveräner Sicherheit. Jedem seiner 13 Bücher sind eigene Axiome vorangestellt, jedesmal ergibt sich eine besondere Struktur, die verschiedenen Strukturen werden je nach Bedarf und strategischer Lage mit großer Kunst aufeinander angewendet. – Übrigens brauchen Axiome keineswegs immer möglichst einfache Aussagen darzustellen, es kann im Gegenteil manchmal zweckmäßig sein, eine komplizierte Aussage als Axiom zu nehmen, beispielsweise um einen besonders interessanten Satz in einer eigens dafür konstruierten Struktur gewissermaßen auf einen Prüfstand zu setzen.

Ich habe von Anwendungen auf praktische Probleme gesprochen und damit das nicht ganz einfache Problem der Anwendungen mathematischer Strukturen auf die uns umgebende Welt, im besonderen auf die Naturwissenschaften, angeschnitten. Schon vorhin haben wir gefragt: Wenn die Strukturen Schachspielen gleichen mit selbstgeschaffenen Figuren und selbstaufgestellten Regeln, wie kann man sie dann auf die empirische Welt anwenden? Darauf ist zu antworten, daß die Axiome zwar grundsätzlich völlig frei und unabhängig aufgestellt werden, daß man sie aber nichtsdestoweniger im allgemeinen im Hinblick auf Erfahrungen in der empirischen Welt konzipieren wird. Die Regeln der Gruppentheorie sind im Hinblick auf das elementare Zählen, die topologischen Axiome im Hinblick auf das räumliche Nebeneinander in unserer täglichen Umgebung geschaffen. Näherungsweise erfüllen Sandkörner und Lichtstrahlen die Hilbert-Axiome, allerdings nur – und das ist von grundsätzlicher Bedeutung –, wenn man nicht allzugroße Entfernungen und ebenso nicht allzukleine, etwa atomistische Größenordnungen betrachtet. Approximativ werden daher auch die Folgerungen aus den Axiomen, d. h. die Sätze der euklidischen Geometrie auf die empirische Welt anwendbar sein, jedenfalls so lange man sich in normalen Größenordnungen bewegt. Die euklidische Geometrie wird innerhalb dieser Grenzen nicht nur die empirische Welt beschreiben, sondern auch sogar erlauben, Naturgesetze zu formulieren und aufgrund davon Naturgeschehen vorauszusehen. Denn die Erforschung der mathematischen Strukturen läuft vielfach der Anwendung in den Naturwissenschaften voraus. So konnte Kepler seine berühmten Planetengesetze nur deshalb sogleich endgültig formulieren, weil er sich der schon seit dem Altertum ausgebauten euklidischen Struktur, insbesondere der Theorie der Kegelschnitte bedienen konnte. So konnte Heinrich Hertz aus den Maxwellschen Gleichungen der Elektrodynamik aufgrund einer genauen Kenntnis der Struktur der Lösungen solcher Differentialgleichungen auf die Existenz von Wellen schließen, deren experimenteller Nachweis dann später wirklich glückte und zu der Ihnen allen bekannten weltweiten Anwendung der elektrodynamischen Wellen führte.

Man darf aber nicht in den Fehler verfallen, einer mathematischen Struktur wie der Hilbert-euklidischen Struktur, d. h. der euklidischen

Geometrie, unbeschränkte Anwendbarkeit oder gar a priori absolute Gültigkeit im Bereich der Naturwissenschaften zuerkennen zu wollen. Verläßt man die Größenordnungen, in denen die Axiome nachgeprüft sind, so kann man nicht, zumindest nicht ohne weiteres, erwarten, daß die Folgerungen aus den Axiomen anwendbar sind. Die empirische Welt kann dann gegenüber der mathematischen Struktur Abweichungen zeigen, die umso größer werden, je weiter man sich von den Ausgangsdimensionen entfernt. Die Naturgesetze können dann durchaus anders aussehen, als es nach der Struktur sein müßte. Um bei der euklidischen Geometrie zu bleiben: Wie unsere Welt in der großen Entfernung aussieht oder wie sie sich in atomistischen Dimensionen verhält, darüber will und kann eine mathematische Struktur nichts aussagen. Ob Parallelen sich nach dem letzten astronomischen Nebel vielleicht doch treffen, ist eine müßige und letztlich sinnlose Frage. Gewiß, die Mathematik ist eine exakte Wissenschaft, die Aussagen, die innerhalb der Strukturen gemacht werden, sind logische Folgerungen aus den Axiomen und als solche exakt, das ist selbstverständlich und trivial. Was würde wohl ein Schachmeister sagen, dem man nach einem siegreichen Turnier das Kompliment macht, daß er nicht ein einziges Mal gegen die Regeln des Schachspiels verstoßen habe. Demgegenüber ergeben sich bei der Anwendung der Strukturen auf die empirische Welt keineswegs notwendig exakte Aussagen. Im Gegenteil: Wir wissen heute, daß die euklidische Geometrie sowohl in sehr großen wie in sehr kleinen Dimensionen nicht gilt, d. h. nicht mehr mit Erfolg anwendbar ist. In kosmologischen Dimensionen gelten, wie seit der allgemeinen Relativitätstheorie mit großer Sicherheit feststeht, spezielle Riemannsche Geometrien. In atomistischen Dimensionen liegen die Dinge noch wesentlich komplizierter. Die Quantenphysik hat gezeigt, daß die makroskopische Raumanschauung, mit der wir im täglichen Leben arbeiten, und die auch die Grundlage der euklidischen Geometrie ist, eine ganz und gar neuartige und andersartige mikroskopische Welt überdeckt, eine Welt, zu deren Beschreibung eine neue mathematische Struktur notwendig ist, die erst in diesem Jahrhundert erarbeitet wurde und die nur einem mathematisch Erfahrenen wirklich zugänglich ist. Diese Überdeckung der mikroskopischen durch die makroskopische Welt ist etwa so zu verstehen, daß die makrosko-

pischen Gesetze sich durch statistische Mittel- und Durchschnittsbildungen aus der ungeheuren Fülle der einzelnen feineren und komplizierteren mikroskopischen Erscheinungen ergeben. Dabei ist besonders bemerkenswert, daß diese neuen Strukturen, sowohl die für die kosmologischen Erscheinungen wie die für die atomistischen Größenordnungen, bereits zum großen Teil fertig vorlagen, als sie von der stetig fortschreitenden Physik benötigt wurden. Einstein konnte bei der Formulierung seiner Entdeckungen auf eine in allen Einzelheiten ausgeführte mathematische Theorie, die Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis zurückgreifen; die moderne Quantenphysik fand ebenfalls eine sehr weit und mit allen Feinheiten ausgebildete mathematische Struktur zu ihrer Verfügung vor, die keineswegs für die Zwecke der Anwendungen in der Physik oder in den Naturwissenschaften entwickelt worden war. Diese wahrhaft erstaunliche Tatsache, daß es möglich ist, neue Strukturen zu entdecken und zu entwickeln, die sich erst später als realisiert in der empirischen Welt erweisen, sie zu entwickeln allein aufgrund der Bedürfnisse des rein mathematischen Denkens, ihre Bedeutung zu erkennen und sie dementsprechend bis in alle Verästelungen durchzubilden ohne jede Ahnung einer späteren Anwendung, diese Tatsache gehört meines Erachtens zu den bemerkenswertesten Erscheinungen der Wissenschaftsgeschichte. Ich will mich nicht auf eine Deutung oder gar eine Erklärung einlassen; das geheiminsvolle Dunkel bei diesem Zusammenhang dürfte schwer zu erhellen sein, sicher aber scheint mir, daß dies eine der größten geistigen Leistungen darstellt, die jemals von Menschen vollbracht worden sind.

Zum Schluß möchte ich noch ein paar Worte über die subjektive Seite meines Themas, über den Mathematiker, der die Mathematik betreibt, in seinem Verhältnis zu den mathematischen Strukturen sagen, und zwar in einer Gegenüberstellung zum Naturwissenschaftler. Der Naturwissenschaftler hat die Natur als Leitbild vor sich, an ihrer realen Gegenwart entzündet sich seine Wissbegierde, an sie kann er durch Beobachtung und Experimente jederzeit Fragen stellen, von ihr erhält er Bestätigung oder Verwerfung seiner Vorstellungen und Erklärungsversuche. Ein solches Leitbild fehlt dem Mathematiker fast ganz. Nur selten und im allgemeinen auch nur in elementaren Fällen kann er aus empirischen Tatbeständen, aus Naturgesetzen oder mit

Hilfe von Instrumenten, z. B. Analogrechnern, Einblicke in die feinere Gestalt mathematischer Strukturen gewinnen. Grundsätzlich aber kann er vollständig frei mit seinen Strukturen schalten, er kann sie nach seinem Willen und Gutdünken aufbauen und gestalten. Anwendungen sind nur selten für ihn erheblich. Sie können und dürfen nur in Ausnahmefällen Einfluß auf sein Schaffen bekommen. Seine Strukturen entwickeln sich nur in vollständiger Freiheit zur Vollkommenheit und sie wachsen nach absoluten Eigengesetzlichkeiten. Aber Freiheit ist immer Glück und Qual zugleich. Das Fehlen eines Leitbildes kann bei mangelnder Phantasie und Tatkraft leicht zu Erstarrung oder zu unfruchtbaren Fehlbildungen führen. Umsomehr wird der Mathematiker sich an die wenigen Kriterien halten, die ihm zur Verfügung stehen. Er wird seine Strukturen beurteilen nach dem Maß ihrer inneren Abgewogenheit, nach organischer Ausbildung, nach innerer Logik und systematischem Aufbau. Schönheit, Symmetrie, Harmonie sind die Kennzeichen einer bedeutsamen Struktur, übrigens Qualitäten, die wir am Euklid so sehr bewundern, wenn sie auch dem Schüler, der aus diesem Buch zu lernen hat, zunächst nicht bewußt werden. Ästhetische Gesichtspunkte sind also für den Mathematiker entscheidend. Er spricht von schönen Sätzen oder er sucht nach eleganten Beweisen, während Einstein als Physiker auf der Suche nach Naturgesetzen meint, man solle die Eleganz Sache der Schneider und Schuster sein lassen. Hier liegen übrigens die Wurzeln der starken inneren Verbundenheit von Mathematik und Musik, von mathematischer Forschung und musikalischer und anderer künstlerischer Komposition, die weiter zu verfolgen hier nicht der Ort ist.

Kehren wir zurück zu Euklid, den Vater der axiomatischen Methode. Ich habe versucht, die Bedeutung und den Einfluß seiner Methode bis in die moderne Zeit in großen Zügen zu skizzieren. Dabei habe ich um der leitenden Idee willen viele historisch wichtige Einzelheiten übergangen, z. B. schon im Altertum die Rolle der beiden Mathematiker der platonischen Akademie, Eudoxos und Theätet. Andere für die Auswirkung der Methode entscheidende Tatbestände, z. B. die Entstehung der nichteuklidistischen Geometrie, habe ich nur gestreift oder etwas vereinfacht und schematisch dargestellt. Es lag mir vor allem daran zu

zeigen, daß die in dem Werke Euklids niedergelegten Gedanken die Keimzelle einer bis heute reichenden Entwicklung sind, welche die gesamte Mathematik mit allen ihren weitreichenden Ausstrahlungen auf die Nachbarwissenschaften umfaßt. Dies wahrhaft große Werk steht ebenbürtig neben den anderen Zeugnissen antiken Denkens und antiker Gestaltungskraft. Es steht vor uns etwa wie die Tempelruinen in Griechenland oder in der Sonne Siziliens, wie diese im Lauf der Zeiten beschädigt, durch Gleichgültigkeit, Mißverständnisse oder Zerstörungswut in seiner Substanz beeinträchtigt, aber in den Grundzügen unverkennbar, für den Wissenden zum großen Teil rekonstruierbar aufgrund seiner starken inneren Gebundenheit und seiner ausgeprägten Struktur, ein Denkmal geistiger Gestaltungskraft und vollendeter Harmonie, das zur Bewunderung herausfordert und zur Weiterbildung anregt.

B 9257, 06 - 38