REDEN

GEHALTEN AM 12. MAI 1917 BEI DER ÖFFENTLICHEN FEIER DER

ÜBERGABE DES PROREKTORATS

DER

UNIVERSITÄT FREIBURG I. BR.

VON

DEM ABTRETENDEN PROREKTOR

GEH. HOFRAT PROFESSOR DR. GEORG V. BELOW

UND

DEM ANTRETENDEN PROREKTOR

PROFESSOR DR. LOTHAR HEFFTER

ZUR FEIER DES GEBURTSTAGES
SEINER KÖNIGLICHEN HOHEIT DES GROSSHERZOGS
FRIEDRICH II.
AM 9. JULI 1917 IN DRUCK GEGEBEN

FREIBURG IM BREISGAU
BUCHDRUCKEREI ERNST A. GUENTHER
1917

II.

REDE DES ANTRETENDEN PROREKTORS PROFESSOR DR. LOTHAR HEFFTER

ANALYSE UND SYNTHESE IN DER GEOMETRIE

Fast bedarf es der Entschuldigung, wenn man angesichts der unvergleichlichen Kriegstaten unserer genialen, willensstarken Feldherren und ihrer tapferen, zähen Truppen zu Wasser und zu Lande, angesichts der Fülle wirksamer Kriegsarbeit daheim in der gegenwärtigen Zeit, da alles dem einen Ziel der Vaterlandsverteidigung zudrängt, rein wissenschaftliche Arbeit zu treiben und sogar ihre Ergebnisse aus der geschlossenen Studierstube in die Öffentlichkeit zu tragen wagt. Und doch hat gerade in diesem Kriege die Wissenschaft, haben zumal die technischen und Naturwissenschaften, also mittelbar auch die Mathematik, ungeahnte Triumphe feiern dürfen. Keine Wissenschaft wäre aber im stande, Aufgaben, die ihr plötzlich von außen her gestellt werden, zu lösen, wenn sie nicht, unbekümmert um solche Möglichkeiten, jederzeit die ihr selbst aus inneren Gründen gut scheinende Entwicklung im Auge gehabt und unbeirrt weitergeführt hätte. Nur so ist sie vielleicht jenen praktischen Anforderungen gewachsen. Die Wissenschaft kann eben nicht nur auf Bestellung, sie muß auch auf Vorrat arbeiten.[1] Es kommt hinzu, daß eine völlige Stillegung aller theoretischen wissenschaftlichen Arbeit die durch den Krieg ohnehin schon unvermeidliche Unterbrechung der Kulturentwicklung in unnötiger Weise erweitert und verschärft hätte.

So darf denn auch heute der Prorektor der Universität bei dem feierlichen Antritt seines Amtes dem alten Brauche folgend Sie zu einem wissenschaftlichen Spaziergang einladen. —

Wohl bei jeder Wissenschaft ist es eine durch ihre Geschichte leicht zu bestätigende und auch an sich verständliche Erscheinung, daß sich in ihrer Entwicklung zwei entgegengesetzte Richtungen unterscheiden lassen: das Untersuchungsobjekt, sei es nun von der Natur gegeben oder erst durch Menschentun und -Denken geworden, steht zunächst in seiner fertigen, sehr komplizierten und speziellen Gestalt vor dem forschenden Auge. Die sich aufdrängende Frage „Wie ist es zeitlich oder kausal entstanden?“ erzeugt eine Rückwärtsverfolgung und Zergliederung bis zu den einfachsten, am weitesten zurückliegenden erreichbaren Elementen, die natürlich in verschiedenen Stadien der Wissenschaft äußerst verschieden sein können; es vollzieht sich eine Analyse, die Auflösung des Zusammengesetzten in das Einfache, der Übergang vom Speziellen zum Allgemeinen. Dann aber kehrt sich der Gang um: Von jenen Elementen oder Keimen aus sucht die Wissenschaft systematisch in lückenloser Folge bis zu dem fertigen oder gegenwärtigen Zustand ihres Untersuchungsgegenstandes zu gelangen: es vollzieht sich eine Synthese, die Zusammensetzung, der Aufbau des Komplizierten aus dem Einfachen, der Übergang vom Allgemeinen zum Speziellen. Zeitlich können Analyse und Synthese einander mehrfach ablösen, mitunter auch nebeneinander herlaufen. Im allgemeinen aber ist die

Analyse die näherliegende und zuerst einsetzende Richtung. Daher ist es verständlich, daß — gleichsam nach dem biogenetischen Grundgesetz — das jugendliche lernende Einzelwesen wie die Wissenschaft selbst wenn auch in abgekürzter Folge erst analytisch vorgehen muß, bevor das dadurch geweckte Interesse es für den umgekehrten synthetischen Weg reif macht.

In der Chemie z. B. sind Analyse und Synthese gerade in dem hier benutzten Sinn termini technici geworden.

Die Biologie — bezeichnender Weise früher eine beschreibende Naturwissenschaft genannt — beschrieb in der Tat zunächst Tiere und Pflanzen von außen, analysierte sie dann mit den feiner werdenden Instrumenten und vorschreitenden Kenntnissen immer weiter, bis das synthetische, von der Zelle ausgehende Bild gelang: der Weg, dessen beide Teile wohl zweckmäßiger Weise auch unsere Jugend in den unteren bezw. oberen Schulklassen durchläuft. Der scherzhafte Unterschied zwischen „Makro-" und „Mikro-Zoologen" ist eine Hindeutung auf die beiden einander entgegengesetzten Richtungen.

Das erwachende geschichtliche Interesse stellte zweifellos zuerst die Frage: Was war vor dem Jetzt, was zur Zeit der Väter und Großväter?, bevor es zu einer von den ältesten Urkunden ausgehenden, kausale Zusammenhänge aufdeckenden synthetischen Darstellung der Geschichte kam. Vielleicht hat deshalb die vielbespöttelte, auf der Berliner Schulkonferenz von 1890[2] gegebene

Anregung, die Jugend solle von Sedan und Gravelotte über Leuthen und Roßbach zurück nach Mantinea und nach den Thermopylen geführt werden, bei nicht banausischer Auffassung doch einen guten Sinn gehabt.

Statt aber die Andeutungen solcher Beispiele durch den Hinweis auf die Medizin, die Sprachforschung, die Jurisprudenz und andere Wissenschaften, was nicht schwer wäre, noch weiter zu vermehren, möchte ich den durch sie erläuterten Begriff der Analyse und Synthese in der Wissenschaft vielmehr etwas eingehender in dem Entwickelungsgang der Geometrie verfolgen.

I.

Einen gewissen Schatz geometrischer Kentnisse hat man frühzeitig besessen. Herodot[3] meldet, daß die alten Aegypter durch die jährlichen Nilüberschwemmungen und die dadurch stets aufs neue notwendige Abgrenzung der verschiedenen Ländereien gegeneinander zu geometrischen Betrachtungen geführt wurden. Jeder Erbauer eines Hauses, ja der einfachsten Hütte wird, wenn er sie nicht vorher besaß, induktiv zu geometrischen Gesetzen geführt. Die uralte Wissenschaft der Astronomie bewirkte selbstverständlich eine schon recht weit gehende Entwicklung unserer Wissenschaft. Ein solcher Schatz geometrischer Kenntnisse diente alsdann dem eigentlichen Geometer, den sie an sich interessierten, als Objekt seiner Forschung.

Aber wir können uns die Sachlage viel bequemer vorstellen, wenn wir unter Benutzung eines oben ausgesprochenen Gedankens, statt auf die fern liegenden Zustände einer grauen Vorzeit zurückzugreifen, uns einen heranwachsenden Einzelmenschen der Gegenwart denken, vielleicht uns selbst in jungen Jahren, als wir noch mit dem Baukasten hantierten. Wie sieht es in der Werkstatt eines solchen kleinen Baumeisters aus oder wie könnte es darin aussehen? In seinem Kasten besitze er allerhand quaderförmige Steine, ein Dach mit rechteckigen Ziegeln und einer kreisförmigen Luke, für die Spitze eines Turmes einen Stein, der oben von drei aneinander stoßenden Quadraten begrenzt wird, also wie jede Ecke eines Würfels aussieht; endlich kann er aus vorhandenen Steinen den kreisförmigen Rand einer Zirkusarena bauen. An Werkzeugen besitze er wesentlich drei: 1) ein gewöhnliches Lineal, das keine Skala trägt, 2) ein verstellbares Parallelen-Lineal, das Sie sich etwa aus einem rechteckigen Bilderrahmen entstanden denken können, wenn dessen vier Ecken drehbare Gelenke erhalten, und mit dem er in beliebigem Abstand voneinander parallele, d. h. sich nicht schneidende gerade Linien ziehen kann, 3) einen rechten Winkel. Statt seiner könnten wir ihm auch einen Zirkel geben; denn es läßt sich leicht begründen, daß er dann ganz dasselbe leisten könnte, wie mit jenen drei Werkzeugen. Zu diesen drei ungeeichten Instrumenten kommt dann noch, aber nicht von gleicher Bedeutung wie sie, ein Maßstab mit äquidistanten Teilpunkten, die 0, 1, 2, ... cm oder irgend einer anderen Längeneinheit darstellen. Einen besonderen Winkelmesser braucht er nicht; denn mit jenem geradlinigen Maßstab kann er auch die Größe eines Winkels bestimmen. Indem der kleine Baumeister mit seinem Material baut und mit seinen Werkzeugen prüft und mißt, erwirbt er analytisch oder induktiv einen beträchtlichen Vorrat praktisch geometrischer Kenntnisse und repräsentiert damit die erste naive Periode der Geometrie.

Er wird nun allmählig reifer und beginnt, seine Schätze systematisch zu analysieren. Wie ein wirklicher Baumeister entwirft er auch von seinen Bauten Grundrißzeichnungen. Dabei beobachtet er, daß seine rechteckige Dachfläche und ihre Ziegeln zwar sich im Grundriß wieder als Rechtecke abbilden, die drei Quadrate der Turmspitze aber als schiefwinklige Parallelogramme. Wenn er sein Parallelenlineal in beliebiger Lage auf das schräge Dach legt, so bilden sich seine Ränder stets wieder als Parallele im Grundriß ab. Wenn er aber seinen rechten Winkel auf das Dach legt, so ist sein Bild im allgemeinen kein rechter Winkel mehr. Die kreisförmige Dachluke bildet sich als Ellipse ab. Ebenso wäre es, wenn die Dachluke selbst elliptisch wäre. Und zeichnete er eine Hyperbel oder Parabel auf das Dach, so wäre der Grundriß stets wieder eine Hyperbel oder Parabel. Legt er endlich seine Skala auf das Dach, so ist ihr Grundriß immer wieder eine Skala mit äquidistanten Teilpunkten, aber im allgemeinen sind die Skalenteile verkürzt gegen die des Originals. Betrachtet er also zwei Punkte A, B, so wird ihre Strecke im allgemeinen bei der Abbildung verändert; betrachtet er aber drei Punkte A, B, C, einer Geraden, so bleibt das Verhältnis AC:BC ihrer Strecken, das Streckenverhältnis, ungeändert. Angesichts aller dieser Veränderungen zwischen Original und Grundriß fragt der heranwachsende Baumeister, der inzwischen auch seinen Schiller kennen gelernt hat, nach „dem ruhenden Pol in der Erscheinungen Flucht", d.h. nach den Eigenschaften seiner ebenen Figuren, die bei allen solchen Grundrißbildungen erhalten bleiben, also z. B. nur nach solchen Eigenschaften des Kreises, die auch jeder Ellipse zukommen, u. s. w. Er sieht: nicht die Rede darf mehr sein von rechten Winkeln, Rechtecken, Quadraten, Kreisen, Strecken, wohl aber noch von Parallelen, Parallelogrammen, Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln, Streckenverhältnissen. Er scheidet aus seinen geometrischen Schätzen alles jene, was wir „Orthogonalgeometrie" nennen wollen, aus und legt des zum Zeichen seinen rechten Winkel bei Seite. Wenn er den Maßstab auch beibehält, so weiß er doch, daß er ihn nicht mehr benutzen darf, um die Länge einzelner Strecken sondern nur um das Verhältnis zweier Strecken derselben Geraden zu messen, das von der gewählten Längeneinheit ganz unabhängig ist. Er scheidet also, kann man wohl sagen, mit der Orthogonalgeometrie gerade dasjenige aus, was seinem naiven Blick zuerst als das Normale erschien und ihn am meisten fesselte. Es ist sehr bezeichnend, daß manche Leute, namentlich Damen, bei dem Wort „Viereck" stets an die speziellste Form eines solchen, an ein Quadrat, denken.

Nun aber die Analyse einmal begonnen hat, geht der reifende junge Forscher noch einen Schritt weiter und benutzt wie vorhin die Grundrißbildung jetzt den photographischen Apparat, mit dem er seinen Grundriß photographiert und zwar so, daß die Platte der Camera nicht etwa gerade parallel jener Grundrißebene steht, sondern ganz beliebig. Das photographische Bild bringt neue Überraschungen. Gerade Linien, die vorher parallel waren, sind es jetzt nicht mehr, — denken Sie nur an das photographische Bild zweier parallelen Eisenbahnschienen auf gerader Strecke. Parallelogramme gehen also in Vierecke allgemeiner Art über, und die kreisförmige Zirkusarena, die ebensogut elliptisch sein dürfte, ergibt, jenachdem sein Apparat mit vertikaler Platte außerhalb, innerhalb oder auf dem Rand der Arena steht, im Bilde eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, Kurven, die man bekanntlich unter dem Namen Kegelschnitte zusammenfaßt. Umgekehrt kann er seinen Apparat auch so aufstellen, daß sich eine Hyperbel oder Parabel in einen beliebigen anderen Kegelschnitt verwandelt. Das Bild der Skala mit äquidistanten Teilpunkten aber zeigt eine Skala, bei der die Strecken von 0 bis 1 und von 1 bis 2 im allgemeinen nicht mehr gleich sind. Infolgedessen ist auch das Streckenverhältnis bei drei Punkten in der Photographie nicht mehr dasselbe wie im Original; nimmt man aber vier Punkte A, B, C, D einer Geraden, bildet das Streckenverhältnis AC: BC und dividiert es durch das Streckenverhältnis AD: BD, so hat man ein Verhältnis zweier Verhältnisse, ein sogenanntes Doppelverhältnis, und es zeigt sich, daß dieses in der Photographie stets denselben Wert hat wie im Original. Nach demselben Prinzip wie beim vorigen Schritt fragt der Forscher nun wieder nur nach den Eigenschaften der Figuren, die ihnen auch in der photographischen Abbildung noch eigen sind. Er scheidet also aus die Parallelität, den Unterschied zwischen den drei Arten von Kegelschnitten, das Streckenverhältnis, kurz alles das, was wir unter dem Namen „Parallelgeometrie" begreifen wollen. Des zum Zeichen legt er auch sein Parallelenlineal bei Seite und behält nur noch das einfache Lineal, neben dem er seinen geeichten Maßstab höchstens noch zur Ausmessung von Doppelverhältnissen benutzt. Die Summe der jetzt noch verbleibenden Begriffe und Säze bezeichnen wir als „projektive Geometrie", weil die photographische Abbildung, die alles übrige ausschied, im geometrischen Sinn eine Projektion, speziell eine Zentralprojektion ist.

So haben wir mit dem anfänglich vorhandenen geometrischen Vorrat eine zweimalige Siebung vorgenommen, indem wir zuerst durch das feinere Sieb der Grundrißbildung die Orthogonalgeometrie, dann durch das gröbere der Photographie die Parallelgeometrie abgeschieden haben, um nur noch die projektive Geometrie zurückzubehalten. Diese drei Abstufungen der Geometrie sind äußerlich charakterisiert durch die drei Instrumente einfaches Lineal, Parallelenlineal, rechter Winkel. Wohl kann es gelegentlich bequem sein, mit allen dreien auch schon in der projektiven oder in der

Parallelgeometrie zu arbeiten oder kompliziertere Instrumente zu benutzen, aber es ist nicht notwendig. Es verhält sich mit ihnen wie bei folgendem Vergleich: Um von Hamburg nach Bremen zu gelangen, kann man ein Flugzeug benutzen, aber es genügt auch ein Schiff, ja sogar ein Wagen. Um von Hamburg nach Helgoland zu gelangen, kann man ein Flugzeug benutzen, es genügt auch ein Schiff aber nicht mehr ein Wagen. Um sich von Hamburg 2000 m in die Atmosphäre zu erheben, muß man ein Luftfahrzeug benutzen. Durch das erforderliche Verkehrsmittel ist die Beziehung zwischen den beiden Orten charakterisiert gerade wie dort durch die erforderlichen Werkzeuge die Abstufungen der Geometrie charakterisiert sind.

Von der untersten dieser Abstufungen, der projektiven Geometrie haben wir nur gesagt, was sie nicht enthält; es fehlt neben dieser negativen noch eine positive Kennzeichnung ihres Inhaltes. Das einzige ungeeichte Werkzeug, das ihr verblieb, war das Lineal. Mit ihm zieht man gerade Linien und kann entscheiden, ob irgend eine gegebene Linie eine Gerade ist oder nicht. Wenn wir aber Punkte und gerade Linien als gegebene Elemente ansehen, so ist mit jener Leistung des Lineals noch gar nichts getan. Außerdem kann man aber mit diesem Werkzeug nur noch entscheiden, ob irgend ein gegebener Punkt auf einer gegebenen Geraden liegt oder nicht, indem man das Lineal an die Gerade legt und nachsieht, ob auch der Punkt anliegt oder nicht. Wir wollen dieses Aneinanderliegen von Punkt und gerader Linie Inzidenz nennen.

Die Inzidenz ist somit die einzige durch das Lineal zu prüfende Beziehung zwischen Punkten und Geraden. Sie ist auch sicher eine projektive Beziehung; denn, wenn z. B. auf einer ebenen Landkarte eine Stadt an einem Fluß oder an einer Bahnlinie liegt, so kann man die Karte photographieren wie man will: die Stadt liegt immer wieder an dem Fluß oder an der Bahnlinie. Wenn aber das Lineal wirklich ein ausreichendes Werkzeug für die projektive Geometrie ist, so kann in diesem ganzen geometrischen Teilgebiet nur von Inzidenzen die Rede sein. Zu diesem Resultat gelangt man in der Tat durch die hier nicht näher zu begründende Tatsache, daß jede Abbildung einer ebenen Figur, bei der jeder Punkt durch einen Punkt, jede Gerade durch eine Gerade abgebildet wird und bei der auch das Bild jeder Inzidenz wieder eine solche ist, durch Zentralprojektion, also z. B. auf photographischem Wege, hergestellt werden kann. Alles, was bei beliebiger Zentralprojektion erhalten bleibt, d. h. aber der ganze Inhalt der projektiven Geometrie muß deshalb auf Inzidenzen zurückführbar sein.

Man könnte nun meinen, hieraus folge eben nur, daß die projektive Geometrie außerordentlich inhaltsarm sei. Wenn ich aber hinzufüge, daß durch ganz ähnliche Schlüsse gezeigt wird, der gesamte Inhalt der Parallelgeometrie ist auf Inzidenzen und Parallelitäten und der gesamte Inhalt der Orthogonalgeometrie ist auf Inzidenzen, Parallelitäten und Orthogonalitäten zurückführbar, so ergibt sich: der gesamte Inhalt der ebenen Geometrie oder

Planimetrie ist auf diese drei elementaren Beziehungen zurückführbar, ein durch seine Einfachheit immerhin verblüffendes Resultat; denn auch der Laie weiß, daß es recht viele geometrische Sätze gibt, selbst wenn er nur an den kleinen Teil davon denkt, der ihm auf der Schule vorgestellt worden ist.

Ich muß aber vor dem Mißverständnis warnen, als wollte ich sagen, daß jede geometrische Beziehung oder Figur oder jeder Satz auf eine endliche Anzahl von Kombinationen der drei Elementarbeziehungen zurückführbar sei. Denn vielleicht denkt jemand bei jenem Ausspruch an das berühmte Problem der Quadratur des Kreises: durch eine endliche Anzahl nur mit Lineal und Zirkel ausgeführter Operationen soll ein Quadrat konstruiert werden, das einem gegebenen Kreise flächengleich ist. Nach Lösungsbemühungen, die sich durch etwa 4000 Jahre hinzogen, ist jetzt vor 35 Jahren hier in Freiburg durch Lindemann die Unlösbarkeit der so gefaßten Aufgabe bewiesen worden.[4] Man wußte aber längst, daß bei unbegrenzter Anzahl der Operationen mit Lineal und Zirkel die Aufgabe mit jeder beliebigen Genauigkeit lösbar ist. Daß sie auch genau lösbar ist, sobald außer Lineal und Zirkel noch andere Instrumente zugelassen werden, wußte man ebenfalls schon lange. Die einfachste derartige Lösung scheint mir immer die des genialen Lionardo da Vinci[5] zu sein: er stellte ein Rad her, dessen Umfang gleich dem gegebenen Kreise und dessen Dicke gleich dem halben Radius des Kreises ist. Rollt das Rad, etwa mit Druckerschwärze gefärbt, einmal ab, so zeichnet es ein Rechteck auf, das genau gleich dem Kreise ist; ein Rechteck aber kann mit Lineal und Zirkel sofort in ein gleich großes Quadrat verwandelt werden.

Kehren wir aber zu der nunmehr gegebenen positiven Inhaltserklärung der drei Abstufungen der Geometrie zurück, so drängt sich nur noch die Frage auf, wie sich die Messung in jeder der Abstufungen in jenes Bild einordnet. Die Messung in der Orthogonalgeometrie, d. h. die Messung der Strecken im gewöhnlichen Sinn, ist nichts anderes als die Abzählung, wie oft sich die gegebene Einheitsstrecke — und eventuell Teilstrecken von ihr — auf die zu messende Strecke legen läßt. Diese Operation des Aneinanderlegens der Maßstrecke kann aber ersetzt werden durch eine Konstruktion, die nur mit Inzidenzen, Parallelitäten und Orthogonalitäten arbeitet; d. h. die Messung besteht in einer Abzählung, wie oft eine gewisse Operation, die unserer Geometrie angehört, auszuführen ist. Praktisch wird diese Abzählung dann natürlich durch ein geeichtes Meßinstrument erleichtert, dem also nur die Bedeutung eines Bequemlichkeitswerkzeuges zukommt. Ganz entsprechend verhält es sich mit der Messung in der Parallelgeometrie bei Feststellung der Zahl eines Streckenverhältnisses und in der projektiven Geometrie bei derjenigen eines Doppelverhältnisses. Oft kann die gegenseitige Lage mehrerer Elemente auch ohne eine Maßzahl erschöpfend beschrieben werden, z. B. die zweier Geraden, die einen Winkel von 30, 45 oder 60 Grad einschließen, im allgemeinen aber nicht. Nicht die Beziehungen zwischen mehreren Elementen an sich sind also metrisch oder ametrisch, sondern die genaue Beschreibung der Beziehung kann stets durch eine Maßangabe erfolgen und erfordert in der Regel, aber nicht immer, eine solche.[6]

Haben wir bisher eine mit zweimaliger Siebung verglichene Analyse der Geometrie in der Ebene vollzogen, so ist es klar, daß der umgekehrte synthetische Weg zunächst die projektive Geometrie in der Ebene aufzustellen hat und zwar mit Einschluß der Messung in dem Sinn, wie sie der projektiven Geometrie eigen ist. Damit muß aber schon die schöpferische Arbeit für die gesamte Geometrie in der Ebene geleistet sein. Denn nach dem Vorangehenden ist es nicht schwer einzusehen, daß die Parallelgeometrie, die bei der zweiten Abstufung zur projektiven Geometrie hinzutritt, selbst nur durch eine Spezialisierung aus jener entsteht, indem nämlich unter allen Geradenpaaren die parallelen, vorher unterschiedslos eingeordneten, jetzt wieder als etwas besonderes ausgezeichnet werden. Ebenso verhält es sich mit der letzten Ergänzung bei Hinzufügung der Orthogonalgeometrie, die wieder nur durch die Spezialisierung, daß unter allen nicht parallelen Geradenpaaren die aufeinander senkrechten ausgezeichnet werden, aus der projektiven und der Parallelgeometrie hervorgeht. Bei diesem Aufbau der Geometrie muß also die projektive Geometrie vollständig aufgestellt sein, damit nachher keinerlei neue Begriffe einzuführen, sondern nur schon vorhandene zu spezialisieren sind. Und gerade diese vollständige Aufstellung der projektiven Geometrie nebst der ihr folgenden systematischen Spezialisierung zur Parallel- und Orthogonalgeometrie bildet eine Hauptaufgabe und einen Hauptreiz der synthetischen Darstellung, weil damit eine Bereicherung der Resultate verknüpft ist. Bei dem älteren analytischen Weg hat man zwar viele spezielle Sätze projektiv verallgemeinert; aber eine Vollständigkeit war dabei kein Erfordernis. Deshalb möchte ich bei diesem synthetischen Weg die Geome:rie mit einem entstehenden Bilde vergleichen: die projektive Geometrie giebt in schwarzen Strichen die Umrisse der Zeichnung, die auch schon plastisch erscheint und Luftperspektive zeigt, sobald mit den metrischen Angaben noch die Schattierungen und die Helligkeitsunterschiede der einzelnen Teile hinzugefügt sind; in der Parallelgeometrie wird ein Farbenton auf einzelne Teile jener Zeichnung gelegt, in der Orthogonalgeometrie ein zweiter teils auf dieselben, teils auf andere, und so erst entsteht das bunte Gesamtbild, das wir anfangs allein zu sehen gewohnt waren.—

II.

Während nun die bisher besprochene Zerlegung der Geometrie in die drei Abstufungen und ihr Aufbau aus ihnen verhältnißmäßig jungen, zum Teil sehr jungen Datums ist, hat eine andere Synthese, der Aufbau der Geometrie aus den einfachsten Elementen innerhalb jener Abstufungen, doch ohne ihre Unterscheidung, sehr viel früher eingesetzt. Wir wollen auch ihr noch unser Interesse zuwenden, bei unserer Darstellung aber jene einmal gewonnene und mindestens als klärendes Ordnungsprinzip wertvolle Unterscheidung schon im Auge behalten.

Aus Punkten und Geraden, gleichsam den stofflichen Elementen, und Inzidenzen zwischen Punkten und Geraden, gleichsam den ersten Zellbildungen oder Protozoen, gilt es also, auf synthetischem Wege zunächst die projektive Geometrie aufzubauen. Aus der Beobachtung mit dem Auge und dem Lineal glauben wir gewisse einfache Aussagen über Punkte, Gerade und Inzidenzen abzulesen, z. B.:

„Zwei Punkte bestimmen stets eine und nur eine Gerade (ihre Verbindungslinie)“

„Zwei Gerade bestimmen stets einen und nur einen Punkt (ihren Schnittpunkt)“.

Schon bei der zweiten Aussage erhebt sich Ihr Widerspruch, indem Sie mit Recht sagen: zwei parallele Gerade haben keinen Schnittpunkt! Aber wir sind in der projektiven Geometrie, in der kein Unterschied zwischen zwei parallelen und zwei nicht parallelen Geraden gemacht werden darf; wir können ja durch photographische Abbildung zwei parallele sofort in zwei nicht parallele Gerade verwandeln und umgekehrt. Das müssen wir sprachlich zum Ausdruck bringen, und dafür kommt uns die Beobachtung zu Hilfe, daß zwei parallele Gerade zwar keinen Punkt, aber eine und nur eine Richtung gemein haben, wobei wir voraussetzen, daß es zu einer Geraden durch einen Punkt stets eine und nur eine Parallele gibt, was wir in der Tat mit Hilfe unseres Parallelenlineals feststellen zu können glauben. Treffen wir also die Verabredung, statt des Wortes „Richtung“ sagen zu wollen „uneigentlicher Punkt“, von dem wir dann die bisher allein betrachteten Punkte als eigentliche unterscheiden, so wird jener vorhin bemängelte Ausspruch ausnahmslos richtig. Es ist uns in der projektiven Geometrie dann gleichgültig, ob der Schnittpunkt zweier Geraden eigentlich, d. h. die Geraden nicht parallel sind, oder uneigentlich, d. h. eine Richtung ist, die Geraden mithin parallel sind. Wir nennen den uneigentlichen Schnittpunkt zweier Parallelen mitunter auch „unendlich fern“ infolge der Beobachtung, daß der wirklich vorhandene Schnittpunkt zweier nahezu parallelen Geraden von der Stelle aus, an der wir die Geraden zunächst betrachteten, sehr weit entfernt ist. In diesen Worterklärungen und dem daraus auch folgenden Ausspruch „Zwei Parallele schneiden sich im Unendlichen“ liegt also absolut nichts Mystisches, und kein Mathematiker behauptet damit die wirkliche Existenz eines Schnittpunktes im eigentlichen Sinn.

Jene beiden und einige andere Aussagen einfacher Art, die man nicht auf noch einfachere zurückführen konnte, sind nun ein System geometrischer A x i o m e. Auf rein logischem Wege folgt aus diesen Axiomen deduktiv die gesamte projektive Geometrie und weiter durch Spezialisierung die gesamte Geometrie. Weil jene Axiome im wesentlichen schon von E u k l i d aufgestellt worden sind,[7] so nennt man diese zum mindesten in ihren Elementen Ihnen allen vertraute Geometrie die E u k l i d i s c h e.

Damit ist in den Hauptzügen der synthetische oder deduktive Weg des Aufbaues der Euklidischen Geometrie skizziert. Er steht im Gegensatz zu der induktiven Erwerbung geometrischer Kenntnisse durch Beobachtung realer Objekte in der ersten naiven Periode der Geometrie, wie sie durch die allererste Tätigkeit unseres kleinen Baumeisters repräsentiert wurde. Ich will, bevor ich auf die Grundlage dieses Aufbaues, die Axiome, noch etwas näher eingehe, nur beiläufig einige Worte über die Art der Deduktion aus ihnen sagen. Wir sind dabei zunächst auf die Sprache angewiesen, deren Wortsinn vielfach nicht eindeutig und hinreichend präzis feststehend zu einer Fehlerquelle bei unseren Schlüssen werden kann. Auch kann es uns bei der Darstellung eines Beweises in Worten leicht geschehen, daß wir bei einem Schluß außer den Axiomen und dem aus ihnen rein logisch Deduzierten unbemerkt der Anschauung Entnommenes benutzen. Solche Fehlerquellen mit absoluter Sicherheit auszuschließen gelingt nur, wenn man sich einer logischen Formelsprache, Logikkalkül oder Begriffsschrift genannt,[8] bedient, deren Symbole es sofort kenntlich machen, wenn einer der Füße eines Schlusses in der Luft schwebt. In erheblichem Maße verringert werden jene Gefahren auch schon in der sog. analytischen oder Koordinatengeometrie — nicht zu verwechseln mit der Analyse in der Geometrie, von der oben die Rede war. Hier werden die Punkte und Geraden durch gewisse Zahlensysteme, Koordinaten, ersetzt, mit denen nun gerechnet wird, bis endlich das Resultat der Rechnung wieder in die Sprache der Geometrie zurückübersetzt wird. Auch hier haben wir einen rein mathematischen, also logischen Formelapparat, der, solange man sich auf ihn beschränkt, untrüglich ist. Aber zwischen den Formeln ist ein Worttext nicht immer ganz zu vermeiden, und in ihn können sich Fehler der geschilderten Art einschleichen, die bewirken, daß keine rein logische Deduktion aus den gegebenen Voraussetzungen vorliegt.[9]

So wichtig indessen diese Dinge für die Reinheit des synthetisch-deduktiven Weges sind, von größerem Interesse dürfte für uns die Frage nach der Natur und Bedeutung seines Ausgangspunktes, d. h. der Axiome, sein.

Beschränken wir uns auf das eigentliche Arbeitsgebiet des Mathematikers, so ist die Sache außerordentlich einfach. Ein System von Axiomen, das in sich selbst keine logischen Widersprüche enthält, ist ihm gegeben und wird von ihm als Summe von Voraussetzungen benutzt, aus denen er rein logisch seine Schlüsse zieht. Dabei ist es ihm ganz gleichgültig, woher jene Voraussetzungen stammen und ob ihnen irgend eine Realität entspricht oder nicht. Sein Standpunkt ist einfach der: Wenn jene Voraussetzungen gemacht werden, so folgt daraus dies und das. Er braucht deshalb auch keine weitere Definition der in den Axiomen auftretenden Begriffe Punkt, Gerade u. s. w. — ich erinnere nur an die scherzhafte: ein Punkt ist ein Winkel, dem man die Schenkel ausgerissen hat, — diese Begriffe sind vielmehr durch die Axiome selbst so weit und nur so weit, wie er es für seine Anwendungen notwendig hat, definiert. Er braucht daher auch mit den Begriffen Punkt, Gerade u. s. w. gar keine anschauliche Vorstellung zu verbinden, ja er darf es eigentlich gar nicht, um nicht in die oben angedeuteten Fehler zu verfallen; er kann ebensogut von Dingen A, Dingen B, u. s. w. sprechen, von denen er nur die Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen benutzt, die in den Axiomen niedergelegt sind, nichts anderes. Er ist der abstrakte Geometer oder besser, da von Geometrie ja gar nichts mehr vorzukommen braucht, der abstrakte Mathematiker oder noch besser der abstrakte reine Logiker. Auch als A x i o m a t i k bezeichnet man neuerdings vielfach diese Geometrie und überhaupt Mathematik strengster Observanz. Selbstverständlich wird der Axiomatiker eines Tages auf den Gedanken kommen, an Stelle jenes ihm gegebenen Systems von Axiomen willkürlich ein abgeändertes System zu setzen, wobei er nur dafür sorgen muß, daß auch dieses System keine logischen Widersprüche in sich selbst trägt, um dann auf diesem System rein logisch eine andere abstrakte Geometrie — wenn ich den Namen „Geometrie" beibehalten soll — zu erbauen. War das erstgedachte Axiomensystem etwa das Euklidische, die darauf erbaute Geometrie also die Euklidische, so nennt man jede auf einem abgeänderten Axiomensystem erbaute Geometrie auch „N i c h t - E u k l i d i s c h".

Aber so ganz weltfremd ist im allgemeinen der Mathematiker denn doch nicht, daß er sich gar nicht dafür interessierte, woher das von ihm zu verarbeitende Rohmaterial, wie ich die Axiome einmal nennen möchte, stammt. Die Antwort auf diese Frage haben wir schon vorbereitet. Teils sagten wir oben, teils haben wir es angedeutet, daß wir aus der Beobachtung mit dem Auge und den einfachen Instrumenten die Aussagen abzulesen glauben, die in den Euklidischen Axiomen niedergelegt sind. Warum sage ich: wir glauben es? Zur Erklärung dieses Ausdruckes muß zunächst bemerkt werden, daß, wenn wir nach praktischer Beobachtung etwa mit dem Lineal von einer „geraden Linie“ sprechen, wir gar nicht die bei hinreichender Vergrößerung rauh erscheinende Kante des Lineals oder den mit noch so feinem Zeichenstift gezogenen, bei hinreichender Vergrößerung aber sich als breites unscharf begrenztes Band erweisenden Bleistiftstrich meinen, sondern ein inneres Idealbild von absoluter Schärfe, dessen sinnlich wahrnehmbare Darstellung unmöglich ist. Wir idealisieren also die durch die Beobachtung gegebenen Objekte. Nun lautet das berühmteste der Euklidischen Axiome, das oben erst beiläufig einmal berührt wurde: Zu einer gegebenen Geraden gibt es durch einen gegebenen Punkt außerhalb jener Geraden stets eine und nur eine Parallele. Wollen wir die Richtigkeit dieses Ausspruches mit unseren Werkzeugen prüfen, so müssen wir die gegebene Gerade grob sinnlich durch einen Bleistiftstrich angenähert darstellen, ebenso den gegebenen Punkt durch einen Bleistiftfleck oder einen feinen Nadelstich im Papier, der unter dem Mikroskop wie ein mächtiger

Granattrichter aussieht; dann legen wir das Parallelenlineal, das natürlich auch nur ein ganz grobes Werkzeug ist und allerhand Ungenauigkeiten birgt, mit seinem einen Lineal an jene Gerade, was natürlich wieder nur in roher Annäherung möglich ist, mit dem anderen an den Punkt und ziehen nun durch diesen wieder einen solchen Bleistiftstreifen. In dem letzteren kann aber ein ganzes Büschel von Idealgeraden, die nur sehr kleine Winkel miteinander bilden, Platz finden, ohne daß wir es überhaupt wahrnehmen. Es könnten auch Teile von Kreislinien mit sehr großem Radius sein und dergl. Die groben Objekte der Beobachtung lassen also mannigfache Idealisierungen zu. Deshalb sagte ich „wir glauben jenes Axiom zu beobachten" und möchte nun diese Betrachtung in den jetzt verständlichen Ausspruch zusammenfassen: Die Euklidischen Axiome sind eine mögliche Art der Idealisierung von Beobachtungsresultaten, vielleicht diejenige, die als die nächstliegende erschien.[10]

Wie nun die Begriffe Punkt, Gerade, u. s. w. erst durch die Axiome ihren präzisen Inhalt erhielten, so gilt das Gleiche auch von dem ganzen Gebiet, dem alle jene Punkte und Geraden angehören, d. h. in dem wir Geometrie treiben. Bisher haben wir dabei immer nur an eine ebene Fläche, also an ein zweidimensionales Gebiet gedacht, wir haben Planimetrie getrieben. Aber erst durch die Euklidischen Axiome, soweit sie sich auf ein zweidimensionales Gebiet beziehen, wird dieses Gebiet oder diese Fläche als eine allseitig unbegrenzte Ebene [11] charakterisiert. Hätten wir ceteris paribus das Euklidische Parallelenaxiom durch das andere ersetzt: „Zu einer gegebenen Geraden gibt es durch einen außerhalb gelegenen Punkt keine Parallele“, so wäre die Fläche, in der wir uns bewegen, eine Kugelfläche [11] und die „Geraden“ wären größte Kreise dieser Kugel wie die Meridiankreise der Erdkugel. Zwei solche sind in der Tat nie parallel sondern schneiden sich ja in zwei diametralen Punkten. Hätten wir jenes Axiom aber ersetzt durch das folgende: „Zu jeder gegebenen Geraden gibt es durch jeden außerhalb gelegenen Punkt unendlich viele Parallele“, so wäre die Fläche als sog. pseudosphärische Fläche [11] charakterisiert und die „Geraden“ wären geodätische Linien auf ihr. Beidemal haben wir auf der betreffenden Fläche die Realisierung einer gewissen Nicht-Euklidischen Geometrie, von deren abstrakter Aufstellbarkeit oben schon die Rede war. Es ist sehr interessant, daß die zweite dieser beiden Geometrien durch Lobatschefskij [12] fast vierzig Jahre früher abstrakt fertig aufgestellt war, bevor durch Beltrami [13] bekannt wurde, daß sie auf jener Flächenart tatsächlich gilt. Durch ein System von Axiomen wird also auch das Gebiet, in dem Geometrie getrieben wird, charakterisiert.

Dies regt eine neue, gar nicht mathematische, sondern praktische oder naturwissenschaftliche Frage an. Wenn wir nicht axiomatische sondern induktive, von der Beobachtung ausgehende Geometrie in irgend einer Fläche treiben, über deren Natur uns zunächst nichts bekannt ist: zu welchem Resultat über die Art dieser Fläche würde uns die Beobachtung führen? — Denken wir uns diese Fläche zunächst durch den Zeichentisch, auf dem wir unsere Figuren entwerfen, gegeben. Die Beobachtungen und Messungen, die wir anstellen, würden wegen ihrer eigenen Ungenauigkeit wieder Spielraum für sehr verschiedenartige Idealisierungen lassen. Wir würden — durch alle unsere Erfahrungen und Überlegungen schon vorsichtig gemacht — erklären müssen: die Oberfläche des Zeichentisches kann ebensogut als Annäherung einer ebenen Fläche wie einer Kugel oder auch einer pseudosphärischen Fläche gelten. Betrachten wir die Oberfläche eines kleinen Binnensees bei Windstille, so wird, selbst wenn wir recht feine Instrumente benutzen, das Resultat dasselbe sein. Betrachten wir aber ein einigermaßen ausgedehntes Stück des Ozeans, so können wir uns leicht überzeugen, daß seine Oberfläche jedenfalls viel zutreffender durch eine Kugelfläche als durch eine Ebene oder Pseudosphäre idealisiert wird. Man könnte nämlich, ohne zu wissen, daß die Erdoberfläche angenähert eine Kugel ist, folgendermaßen verfahren. Sie wissen, daß in einem geradlinigen Dreieck die Winkelsumme zwei Rechte beträgt. Bei einem aus kürzesten Linien auf einer Kugelfläche gebildeten Dreieck ist die Winkelsumme größer, bei einem solchen Dreieck auf der Pseudosphäre kleiner als zwei Rechte, und zwar ist die Abweichung von zwei Rechten umso größer, je größer das Dreieck ist. Nehmen wir nun z. B. das auf dem großen Ozean liegende

Dreieck San Franzisko — Yokohama — Apia und setzen wir voraus, daß Schiffe im stande sind, jede der drei Strecken auf dem kürzesten Wege zurückzulegen, so könnte man bei der gleichzeitigen Abfahrt zweier Schiffe von San Franzisko nach Yokohama und nach Apia mittels eines Fernrohrs den Winkel zwischen den Wegen der beiden Schiffe messen. Ebenso in Yokohama und in Apia. Die Summe dieser drei Winkel wäre erheblich größer als zwei Rechte, und damit wäre gezeigt, daß diese Meeresoberfläche nicht durch eine Ebene oder Pseudosphäre, sondern viel zutreffender durch eine Kugel idealisiert werden kann.

Diese für ein zweidimensionales Operationsgebiet angestellten Erwägungen haben uns nun vorbereitet, in dreidimensionale Gebiete, die wir Räume nennen, hinauszutreten. Durch ein angenommenes dreidimensionales System von Axiomen, bei denen von Punkten, Geraden, Ebenen u.s.w. oder von Dingen A, B, C, u.s.w. die Rede ist, wird ein abstrakter Raum, von dem wir reden, charakterisiert. Durch die Euklidischen Axiome wird der sog. Euklidische oder ebene Raum, durch ähnlich wie oben abgeänderte Axiome ein Nicht-Euklidischer oder gekrümmter Raum, z.B. ein sog. sphärischer Raum charakterisiert. Alles dies sind zunächst wieder völlig abstrakte Begriffsbildungen vom axiomatischen Standpunkt aus.

Wenn wir uns nun aber — im Gegensatz zu Kant — zu der realistischen, neuerdings durch Study [14] besonders klar vertretenen Weltanschauung bekennen und an die Existenz eines realen Raumes glauben, dessen Struktur durch mathematische Beziehungen beschrieben werden kann, so erhebt sich natürlich ähnlich wie vorhin bei der Tischplatte, dem See oder der Ozeanoberfläche als eine ganz neue Frage die nach dem Charakter dieses realen Raumes. Ist er ein ebener Raum, ein sphärischer Raum oder von welcher Art sonst? Wäre er z. B. sphärisch, so wäre er zwar unbegrenzt aber endlich, ähnlich wie es die Kugelfläche unter den Flächen ist. Die geraden Linien wären ersetzt durch in sich zurücklaufende geschlossene Linien von sicher sehr großer aber endlicher Länge. Die Lichtstrahlen würden solche Linien verfolgen, weil jedes hinlänglich kurze Stück einer solchen der kürzeste Weg zwischen seinen Endpunkten wäre. Wenn die Augen scharf genug wären, müßte man also im Hintergrunde des ganzen Weltbildes seinen eigenen Hinterkopf erblicken, wie Helmholtz[15] bemerkte. Die Sonne müßte man bei Nacht von ihrer uns bei Tage abgekehrten Seite als einen Stern sehen, worauf Harzer[16] aufmerksam gemacht hat. Der Schreiner könnte uns keine ebene Tischplatte machen, zu seinem Glück; denn, wenn er es könnte, würden wir von der Platte höchstens die vier Ecken und, wenn die Platte kreisrund wäre, höchstens den Rand sehen und sie deshalb ablehnen.

Die Frage nach der Beschaffenheit des realen Raumes ist natürlich ebenso wie vorhin die nach dem Charakter der Meeresoberfläche ein naturwissenschaftliches Problem. Unter den abstrakten Axiomensystemen aber, die wir aufstellen können, werden uns im Gedanken an die Anwendungen, namentlich an die theoretische Physik, diejenigen am meisten interessieren, deren Aussagen mit den Beobachtungen im realen Raum nicht im Widerspruch stehen. Das sind freilich bei quantitativer Unterscheidung immer noch unendlich viele, bei qualitativer aber nur eine kleine Anzahl. Jedes von ihnen kann — und das ist natürlich ein ganz anderer Standpunkt wie der des abstrakten Axiomatikers — als eine Hypothese über die Beschaffenheit des realen Raumes angesehen werden, als die Hypothese nämlich, daß er eben, sphärisch oder sonstwie gestaltet sei. Selbstverständlich hat man den Versuch gemacht, zwischen mehreren dieser Hypothesen, von denen höchstens eine richtig sein kann, zu entscheiden und zwar, indem man wieder in einem aus kürzesten Linien im Raum gebildeten Dreieck die Winkel ausgemessen hat. Jetzt sind, wie schon gesagt, die Lichtstrahlen solche kürzeste Linien. So hat Gauss[17] in dem Dreieck Hohehagen — Brocken — Inselsberg, dessen Seiten etwa 69, 85, 107 km lang sind, indem er von jedem dieser drei Punkte die beiden anderen anvisierte, die Winkel gemessen und keine Abweichung ihrer Summe von zwei Rechten gefunden, die außerhalb der Fehlergrenzen der Beobachtung gelegen hätte. Der höheren Geodäsie und Astronomie bleibt es vorbehalten, diesen und andere Versuche mit immer feineren Instrumenten und für immer größere Dimensionen zu wiederholen. Leider kann man ihn nicht zwischen der Erde und zwei anderen Sternen anstellen! Jedenfalls war mit jenem

Gauss'schen Versuch gezeigt: Wenn der Raum nicht eben sein sollte, so weicht er höchstens nur sehr wenig von einem ebenen Raume ab. M. a. W. die Euklidische Geometrie stellt zum mindesten eine sehr brauchbare Annäherung an die mathematische Erfassung des realen Raumes dar.

Mit diesem versöhnlichen Resultat eile ich zum Schluß. Wir haben Analyse und Synthese in der Geometrie in doppeltem Sinn angetroffen und in den Hauptzügen verfolgt. Was ergibt sich daraus für die Lehre unserer Wissenschaft? Die Schule soll uns namentlich zweierlei übermitteln: Kenntnisse und Schulung des Denkens. Beides wird erreicht, wenn auf der alleruntersten Stufe analytisch oder induktiv begonnen und durch anschauungsmäßige Gewinnung elementarer Kenntnisse das Interesse geweckt wird, dann aber gerade mit Rücksicht auf das zweite Ziel der deduktive synthetische Weg streng zur Geltung kommt. Dabei ist es auf der Schule nicht unbedingt nötig, diesen gleich bei den Axiomen selbst zu beginnen; man kann auch von einer höher liegenden Basis ausgehen, die dann erst in den obersten Klassen vielleicht durch jene zu ersetzen wäre. Denn der fast noch im Kindesalter stehende Anfänger wird für die Axiome der Geometrie im allgemeinen ebensowenig Interesse aufbringen können, wie für die Grammatik seiner Muttersprache. Kann die Unterscheidung zwischen den zuerst besprochenen drei Abstufungen der Geometrie auf der Schule überhaupt gelehrt werden, so empfiehlt sich hier jedenfalls der historische analytische Weg, der Weg der Verallgemeinerung zuerst gewonnener spezieller Resultate. — Der Hochschulunterricht dagegen wird natürlich von Anfang an deduktiv sein müssen, mit zu ganz bestimmtem Zweck eingeschalteten Ausnahmen. Er sollte auch den Jünger unserer Wissenschaft in die Dreiteilung einführen und zwar in synthetischer Folge, d.h. vom Allgemeinen zum Speziellen vorschreitend. — Der Forscher endlich wird seine Resultate induktiv finden, aber deduktiv begründen. Wenn er die Abstufungen der Geometrie ablehnt, steht er sich selbst im Licht, weil ihm mit der Einordnung seines jeweiligen Problems in den richtigen Abschnitt auch gleich ein engerer Bereich der in Betracht kommenden Lösungsmittel gegeben ist.

Anmerkungen

1 Ähnlich P. Du Bois-Reymond, Was will die Mathematik und was will der Mathematiker? Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 19 (1910) S. 198.

2 Verhandlungen über Fragen des höheren Unterrichts. Berlin, 4. — 17. Dezember 1890. Berlin, W. Hertz 1891. S. 773.

3 Herodot, Geschichten, II. Buch, Kap. 109.

4 F. Lindemann, Über die Ludolph'sche Zahl, Berichte der Berliner Akademie 1882.

5 M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. II. 2te Aufl. (1900) S. 301 f.

6 Wenn man von metrischer Geometrie spricht, sollte man also zur Vermeidung von Unklarheiten und Widersprüchen sich stets gegenwärtig halten und bei der Definition zum Ausdruck bringen, daß darunter nicht ein Sonderbereich der der geometrischen Forschung unterworfenen Objekte, sondern nur die besondere Behandlung dieser Objekte zu verstehen ist, bei der die gegenseitige Lage mehrerer Elemente durch die Angabe der Zahlenwerte von Doppelverhältnissen bestimmt wird. Leider hat sich aber bei vielen Schriftstellern der Brauch eingebürgert, das, was wir Parallel- und Orthogonalgeometrie nennen, zusammen als metrische Geometrie zu bezeichnen und diese in Gegensatz zur projektiven Geometrie zu stellen. In vollkommenem Widerspruch hiermit steht der ebenfalls und zwar mit Recht längst eingebürgerte Ausdruck „projektive Metrik" oder „projektive Maßbestimmung", worunter die rein projektive Einführung des Doppelverhältnisses verstanden wird, bei der nur gezählt wird, wie oft zu drei gegebenen Elementen eines Grundgebildes I. Stufe das vierte harmonische konstruiert werden muß, um ein gewisses ebenfalls gegebenes Element zu erreichen oder ihm beliebig nahe zu kommen. Andererseits ist es unberechtigt, Parallelität und Orthogonalität als „metrische" Beziehungen etwa in dem Sinn zu bezeichnen, daß sie nur unter Zuhülfenahme von Messungen zu erklären wären.

Solche Unklarheiten und Widersprüche werden vermieden, wenn die im Text angedeutete, auf der Invarianz eines geometrischen Teilbereiches bei der zugehörigen Transformationsgruppe beruhende Einteilung benutzt wird: Projektive Geometrie — Parallelgeometrie — Orthogonalgeometrie, jede mit Einschluß ihrer Metrik. Dabei erweist es sich als bequem, projektive Geometrie und Parallelgeometrie zusammen als affine, affine und Orthogonalgeometrie zusammen als äquiforme Geometrie zu bezeichnen.

Für die Entstehung dieser Einteilung und ihre Durchführung im Einzelnen müssen folgende Quellen genannt werden:

Cayley, A sixth memoir on quantics, Phil. Trans. t. 149 (1859) S. 61 — 90, — Coll. math. papers Bd. II. (1889) S. 561 ff.

F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen, Programm 1872; wieder abgedruckt Math. Ann. Bd. 43 (1893), S. 63 ff. Hier heißt äquiforme Gruppe „Hauptgruppe", ein Name, der einmal nicht durch sich selbst verständlich ist und außerdem vielleicht eher noch der projektiven Gruppe zukäme. Die äquiforme Geometrie wird „Elementargeometrie" genannt, was den Anschein einer Beschränkung ihres Inhaltes erwecken könnte.

E. Study, Über Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie, Leipziger Berichte 1896 S. 649 ff.

L. Heffter, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. Bd. 12 (1903) S. 490 ff.

„ , Über Anordnung und Aufbau der Geometrie, Festschrift Adolph Wüllner gewidmet, Leipzig, Teubner 1905 S. 77. Hier sind schon die Namen Parallel- und Orthogonal-Geometrie als die besseren bezeichnet im Vergleich zu Parallel- und Orthogonal-Metrik, die in jenen Schriften und ebenso in dem nachstehend genannten Werk noch beibehalten sind als äußerliches Zugeständnis gegen den oben genannten herrschenden Sprachgebrauch, der projektive Geometrie und Metrik als Gegensätze behandelt.

L. Heffter und C. Koehler, Lehrbuch der analytischen Geometrie Bd. I., Leipzig und Berlin, Teubner 1905, worin der oben im Text bezeichnete synthetische Weg von der projektiven zur Parallel- und Orthogonal-Geometrie im Einzelnen durchgeführt ist. Nur die projektive Maßbestimmung, das Doppelverhältnis, wird dort nicht rein projektiv sondern durch das Streckenverhältnis und dieses durch den der Orthogonalgeometrie angehörigen Messungsprozeß eingeführt, — eine Rücksichtnahme auf den jüngeren Leser, der zunächst einmal für das ganze Ordnungsprinzip der Geometrie gewonnen und nicht gleich im Anfang durch allzu abstrakte und komplizierte Betrachtungen abgeschreckt werden sollte. Im II. Bande, der zur Zeit im Manuskript abgeschlossen nur auf den Druck wartet, wird aber in einem Anhang die rein projektive Einführung des Doppelverhältnisses nachgetragen.

L. Heffter, Gruppentheoretische Begründung der Euklidischen Geometrie, in Pascal's Repertorium der höheren Mathematik, 2. Aufl. her. von Epstein und Timerding II. 1. Teubner 1910 S. 57 ff.

Es würde zur weiteren Klärung der Benennungen dienen, wenn man bei der Beschreibung der geometrischen Beziehungen innerhalb jeder der drei geometrischen Abstufungen die Angabe von Lagenbeziehungen, Anordnungen und Maßbestimmungen unterscheiden wollte. Als elementare Lagenbeziehung würde dann bezw. die Inzidenz, die Parallelität und die Orthogonalität zu bezeichnen sein. — Als elementare Anordnungsbeziehung hat man in der projektiven Geometrie die gegenseitige Lage zweier Elementepaare eines Grundgebildes I. Stufe, Trennung oder Umschließung. (Diese elementare projektive Anordnungsbeziehung kann übrigens nachträglich, wie bekannt, auf Lagenbeziehungen zurückgeführt werden, da zwei Elementepaare sich umschließen oder trennen, jenachdem es ein Elementepaar gibt oder nicht, das mit jenen beiden einen harmonischen Wurf bildet.) Die elementaren Anordnungsbeziehungen der Parallel- und Orthogonalgeometrie entstehen aus der projektiven durch Auszeichnung der uneigentlichen Ebene bezw. auch noch des Kugelkreises in ihr, nämlich in der Parallelgeometrie die Begriffe „zwischen" und „außerhalb", in der Orthogonalgeometrie die Begriffe

„spitzer“ und „stumpfer Winkel“. — Die elementare Maßbestimmung endlich ist in der projektiven Geometrie das Doppelverhältnis, in der Parallelgeometrie das Abstandsverhältnis, in der Orthogonalgeometrie das Richtungsverhältnis. Hat man z. B. einen harmonischen Wurf zweier Punktepaare, so wird durch die Lage der Punkte zum Viereck ihre Lagenbeziehung gegeben, durch die Angabe, daß die beiden Paare einander trennen, ihre Anordnung, und durch die, Angabe, daß ihr Doppelverhältnis den Wert — 1 hat, erfolgt eine metrische Bestimmung.

Treibt man analytische oder Koordinatengeometrie, so wird zwar die Lage, jedes Punktes, jeder Geraden, jeder Ebene zu einem gegebenen Bezugssystem stets metrisch bestimmt. Wird dann aber jeder Punkt, jede Gerade, jede Ebene des Raumes durch ihre so bestimmten Koordinaten ersetzt, so drücken sich die Lagenbeziehungen irgend einer Figur durch das Verschwinden gewisser einfacher relativer Invarianten der die gerade betrachtete geometrische Abstufung charakterisierenden Gruppe aus. Die Anordnungsbeziehungen drücken sich durch das Vorzeichen von Ausdrücken aus, die bei allen in Betracht kommenden Transformationen in diesem Vorzeichen invariant sind. Die metrischen Bestimmungen erfolgen durch die Angabe des Wertes von absoluten Invarianten der betreffenden Gruppe.

7 Heiberg, Euclidis Elementa, Leipzig 1883—1888. Erstes Buch; Erklärungen, Forderungen Grundsätze.

8 Vergl. E. Schröder, Vorlesungen über die Algebra der Logik, I.—III., Leipzig 1890—1895 wo sich auch die Litteratur über andere Arten von Begriffsschrift findet.

9 Vergl. hierzu M. Pasch, Grundlagen der Analysis, Leipzig und Berlin, Teubner 1909 S. 5: Wesen des mathematischen Beweises.

10 Die sorgfältige Herstellung des Weges vom beobachteten Objekt bis zum mathematischen Begriff ist eine der wesentlichen Leistungen des Werkes von M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig, Teubner 1882, 2. Aufl. 1912. Vergl. auch Journ. für d. reine u. angew. Math. 147 (1917) S. 184 ff.

11 oder eine in diese verbiegbare Fläche.

12 N. J. Lobatschefskij, Kasaner Bote 1829 und 1830. — Gesammelte geom. Werke I. S. 1—67.

13 E. Beltrami, Saggio di Interpretazione della Geometria Non-Euclidea, Napoli 1868.

14 E. Study, Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raum, Braunschweig, Vieweg 1914 und Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. XXIII. (1914) S. 322—334: Das Raumproblem.

15 Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome. Vortrag im Dozentenverein zu Heidelberg 1870. Popul. wiss. Vorträge. III. Heft. Braunschweig, Vieweg 1876 S. 47.

16 Die Sterne und der Raum. Rektoratsrede Kiel 1908, und Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. XVII. (1908) S. 255 ff.

17 Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, 1843 und 1846; Werke Bd. IV S. 259 ff.