Feierlichkeit anlässlich der Übergabe des Rektorates an der Grossh. Technischen Hochschule „Fridericiana“ zu Karlsruhe.

Bericht über das Studienjahr 1907/1908

erstattet von dem abtretenden Rektor

Th. Rehbock

Oberbaurat und Professor des Wasserbaus

Zur Geschichte des Umkehrproblems der Integrale

Festrede, gehalten von dem Rektor

des Jahres 1908/1909

Dr. A. Krazer

Professor der Mathematik

[illegible]

Zur Geschichte des Umkehrproblems der Integrale.

Will man im Rahmen eines Vortrags ein Thema aus der Geschichte einer Wissenschaft behandeln, so wird man sich entweder auf einen einzelnen Gelehrten oder auf ein einzelnes Problem beschränken müssen; man wird entweder den Einfluss schildern, den einer der führenden Geister auf die Entwicklung jener Disziplinen ausgeübt hat, denen er seine Arbeit zuwandte, oder man wird zeigen, wie eine der grossen Fragen allmählich entstanden, wie sie sich unter den Händen ihrer Bearbeiter gewandelt und ausgestaltet hat, bis endlich ihre volle Beantwortung zu einem Marksteine in der Geschichte der Wissenschaft geworden ist.

Unter den mathematischen Problemen besitzt kaum eines eine so interessante Geschichte wie das Umkehrproblem der Integrale. Nicht nur, dass bei ihm die Stufen der allmählichen Entwicklung schärfer als bei irgend einem anderen geschieden sind, sondern wir begegnen auch bei seiner Schilderung einer ungewöhnlich grossen Zahl der hervorragenden Analysten des 19. Jahrhunderts, von denen ein jeder an dem stolzen Baue gearbeitet, bis endlich das Genie Riemanns ihm den Schlusstein aufgesetzt hat.

Umkehrung eines Integrals

$$u = \int_a^x f(x)\, dx \tag{1}$$

heisst das Problem (bei gegebener unterer Grenze a) die obere Grenze x als Funktion:

$$x = \varphi(u) \tag{2}$$

des Integralwertes u zu bestimmen; also den Integralwert u als die unabhängige, die obere Grenze x als die abhängige Veränderliche anzusehen; nicht mehr zu fragen, welchen Wert u das Integral annimmt, wenn bis zu einer gegebenen Grenze x integriert wird, sondern umgekehrt zu fragen, bis zu welcher Grenze x man integrieren müsse, damit das Integral einen gegebenen Wert u annehme.

Diese Frage zu stellen, d. h. auf solche Weise eine Funktion φ zu definieren, war in der ersten Zeit nach der Erfindung der Infinitesimalrechnung abseits des Weges der mathematischen Forschung gelegen. So lange man nur solche Integrale betrachtete, welche sich durch die bekannten Funktionen ausdrücken liessen, wurden auch durch deren Umkehrung keine neuen Funktionen geliefert, da zu jeder Funktion die inverse schon vorhanden war; es fiel aber niemanden ein, etwa die Funktion

$$x = \sin u \tag{3}$$

durch die Gleichung:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{4}$$

definieren zu wollen; vielmehr galt die Sinusfunktion als die früher eingeführte, längst bekannte Funktion, der Funktion (4) aber wurde weder ein besonderer Namen, noch ein besonderes Zeichen zugeteilt; sie hiess nur $u = \arcsin x$.

Aber es wäre auch gar nicht möglich gewesen, die Definition der Sinusfunktion auf die Gleichung (4) zu stützen, solange der Begriff der Integration auf das reelle Gebiet beschränkt war; denn wollte man die Periodizität des Sinus erklären, so musste dem Integrale (4) die Eigenschaft zugesprochen werden, für einen Wert von x unendlich viele Werte annehmen zu können.

So bedurfte es anderer Probleme und neuer Methoden, bis das Umkehrproblem für die mathematische Forschung fruchtbar gemacht werden konnte, und obwohl die Mathematiker wiederholt auf das obige Beispiel zurückkamen und es als Prüfstein benutzten für die Fortschritte, die sie in der Integralrechnung machten, so dauerte es doch geraume Zeit, bis sie die Lehre verstanden, die in ihm liegt, nämlich nicht das Integral (4) zu betrachten, sondern die inverse Funktion (3), »welche, um von anderem zu schweigen, für jeden beliebigen Wert des Argumentes u einen einzigen bestimmten Wert besitzt, welche ferner in eine Reihe entwickelt werden kann, die nach den ganzen positiven Potenzen von u fortschreitet und für alle reellen und imaginären Werte dieser Variable konvergiert, welche weiter in lineare Faktoren zerlegt werden kann, die durch jene Werte, für welche die Funktion verschwindet, bestimmt sind; kurz, welche alle Eigenschaften der ganzen rationalen Funktion von u besitzt«[1].

»Nachdem«, so beginnt Legendre seine Exercises de calcul intégral, »jene Differentialausdrücke erschöpft waren, welche sich entweder algebraisch oder durch Kreisbogen und Logarithmen integrieren lassen, beschäftigten sich die Mathematiker mit der Aufsuchung aller jener, welche durch Ellipsen- oder Hyperbelbogen integrierbar sind; man hatte Grund zu glauben, dass diese Transzendenten den ersten Rang einnehmen nach den zyklometrischen und logarithmischen Funktionen.«

»Formeln, welche man auf diesem Wege integrieren kann, fanden sich in sehr grosser Zahl; aber die einzelnen Resultate entbehrten zunächst des Zusammenhangs und waren weit davon entfernt, eine Theorie zu bilden«[2].

Als der Schöpfer der Theorie der »elliptischen Integrale«, mit welchem Namen wir heute alle Integrale belegen, bei welchen der Integrand aus x und der Quadratwurzel aus einer ganzen rationalen Funktion dritten oder vierten Grades von x rational zusammengesetzt ist, kann erst Euler bezeichnet werden. Es waren zwei Richtungen, aus denen ihm die Vorarbeiten anderer zuflossen; die eine Richtung ist durch die Namen Jakob und Johann Bernoulli und Fagnano bezeichnet und durch das Problem charakterisiert, für solche Kurven, deren Bogenlänge durch ein elliptisches Integral gegeben und daher durch die gewöhnlichen Funktionen nicht darstellbar ist, die also, wie man sagte, nicht rektifizierbar sind, rektifizierbare Summen oder Differenzen zweier Bögen aufzufinden[3]. Jacobi bezeichnet den 23. Dezember 1751, an dem Euler von der Berliner Akademie beauftragt wurde, die ihr von Fagnano übersandten »Produzioni« zu prüfen, ehe man dem Verfasser antworte, geradezu als den Geburtstag der Theorie der elliptischen Funktionen[4].

Zwar hatte sich Euler schon vorher in zwei Abhandlungen[5] mit elliptischen Integralen beschäftigt, aber zu jenen Arbeiten, welche ihn durch die Entdeckung des Additionstheorems dieser weit über seine Vorgänger hinaushoben und als den ersten Begründer ihrer Theorie erscheinen lassen, wurde er in der Tat erst durch das Studium von Fagnanos Werk veranlasst[6].

Nach diesem Additionstheorem ist die Summe von zwei gleichartigen elliptischen Integralen 1. Gattung stets gleich einem einzigen Integrale derselben Art, dessen Grenze sich aus den Grenzen jener durch eine algebraische Gleichung bestimmt. Euler entging durchaus nicht, dass hier eine weitgehende Analogie zwischen dem elliptischen Integral und dem Arcussinus zutage tritt[7]; auch war es ihm durchaus geläufig, wie aus dessen Additionstheorem durch die Einführung der inversen Funktion, des Sinus, die viel bekanntere und ungemein wichtige Formel:

$$\sin (u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

hervorgeht; trotzdem kam er nicht auf den Gedanken, eine ähnliche Substitution im Additionstheorem der elliptischen Integrale 1. Gattung zu machen und zu dem Ende die inversen Funktionen dieser einzuführen. Man sieht, wie nahe Euler dem Umkehrproblem gekommen ist, und geht wohl nicht fehl, wenn man annimmt, dass die nach seinem Vorbilde Fagnano gepflogene Gewohnheit, die gewonnenen Formeln stets geometrisch zu deuten, in ihm solche rein analytische Formulierungen nicht aufkommen liess.

Eine zweite Gruppe von Arbeiten Eulers über elliptische Integrale knüpft an jene Untersuchungen Maclaurins[8] und d'Alemberts[9] an, in denen der erstere mit geometrischen, der letztere mit analytischen Hilfsmitteln eine Anzahl von Integralen abgeleitet hat, welche sich durch einfache Substitutionen auf diejenigen Integrale reduzieren lassen, durch welche der Bogen einer Ellipse oder Hyperbel gemessen wird. Unter diesen Abhandlungen[10], in denen man die Anfänge der Reduktion der elliptischen Integrale auf Normalformen und die ihrer Transformation sehen wird, ist bemerkenswert jene, in der Euler ausdrücklich sagt, dass man die Kegelschnittbögen als neue Transzendenten in der gleichen Weise wie die Logarithmen und Kreisbogen in die Analysis einführen müsse, und dabei, so wie man in der Trigonometrie den speziellen Radius 1 für den Grundkreis wählt, für die Kegelschnitte den Halbparameter 1, also die Scheitelgleichung:

$$y^2 = 2x - \frac{x^2}{a}$$

($a > 0$ Ellipse, $a < 0$ Hyperbel) als Ausgangspunkt vorschlägt[11]. Auch hier wäre der Gedanke der Einführung nun auch der inversen Funktionen als Analoga der trigonometrischen nicht weit ab gelegen.

Wie wenig aber Euler geneigt war, auf diesen Gedanken einzugehen, zeigen seine mechanischen Arbeiten. Im 13. Kapitel der Theoria motus handelt es sich um die Bestimmung der Lage der momentanen Drehungsachse eines kräftefreien starren Körpers; Euler erhält die Zeit durch die Stellungswinkel dieser Achse in Form elliptischer Integrale erster Gattung ausgedrückt und müsste, um nun die Winkel als Funktionen der Zeit zu erhalten, diese Integrale umkehren. Dies versucht er nicht; er nimmt vielmehr, wie er selbst sagt, »Zuflucht zu einem mechanischen Hilfsmittel, der Bewegung des Kreispendels; da nämlich dessen, uns bekannte Bewegung durch eine ähnliche Integralformel bestimmt wird, so kann man auch auf gewisse Weise abschätzen, wie jene Bewegung verläuft«[12].

So umfangreich auch die Arbeiten Eulers über die elliptischen Integrale sind, und so gross insbesondere die Bedeutung seiner Auffindung der Additionstheoreme dieser für die weitere Entwicklung ihrer Lehre war, so unternahm er doch noch keine zusammenhängende Darstellung der letzteren. Auf den bisherigen Grundlagen eine selbständige Theorie errichtet zu haben, ist vielmehr Legendres »unvergänglicher Ruhm«[13].

Schon mit Legendres[14] erster Abhandlung tritt die Theorie der elliptischen Intregale in ein neues Stadium, indem die geometrische Grundlage, der sie allerdings bisher fast alles verdankt hatte, zurücktritt, um einer rein analytischen Behandlung der Integrale um ihrer selbst willen Platz zu machen. Es kann unsere Aufgabe nicht sein, den Inhalt des Lebenswerkes Legendres, seines Traité des fonctions elliptiques, in dem er schliesslich alle seine Untersuchungen zusammenfasste, zu schildern; uns interessiert vielmehr nur seine Stellung zum Umkehrproblem, und da tritt die eigentümliche Erscheinung zutage, dass ebenso wie Euler an entscheidender Stelle durch sein immerwährendes Zurückgehen auf die geometrischen Anwendungen abgehalten wurde, zur Einführung der inversen Funktionen zu schreiten, so Legendre seine Neigung zu numerischer Behandlung der Probleme hindernd in den Weg trat. Nachdem er die Tafeln zur numerischen Berechnung der elliptischen Integrale hergestellt hatte, war für ihn auch das Umkehrproblem gelöst[15], und so wenig es heute einem Benutzer der Logarithmentafel, wenn er zum gefundenen Werte a eines Logarithmus die Zahl x sucht, für welche $\log x = a$ ist, zum Bewusstsein kommt, dass er damit die Potenz 10^a berechnet, so wenig dachte Legendre daran, dass er mit der Aufsuchung der Amplitude zu gegebenem Integralwert einem neuen gleichberechtigten Funktionszusammenhange nachgehe, ja wir wissen aus seinen Briefen an Jacobi, wie schwer es ihm wurde, sich in diese andere Auffassung, nachdem sie von Abel geschaffen war, einzuleben[16].

Während nämlich Legendre noch an seinem Traité arbeitete, hatte schon Abel begonnen, sich mit den elliptischen Integralen zu beschäftigen. Mit dem Blicke des Genies erfasste dieser sogleich im Beginne seiner wissenschaftlichen Laufbahn den Gedanken der Umkehrung des elliptischen Integrals, an dem Euler und Legendre, beide während der Arbeit eines Menschenalters vorübergegangen waren. Er stellte sich die Aufgabe, nachdem man doch die Analogie dieses Integrals mit dem Arcussinus immer wieder betont hatte, endlich auch das Analogon des Sinus zu schaffen. Neben dieser Leistung Abels muss uns aber wegen der bald sich daran knüpfenden Folge auch eine andere, vielleicht noch grossartigere interessieren, nämlich die Auffindung jenes Theorems, das nach Jacobis Vorschlag Abels Namen trägt.

Am 4. August 1823 schrieb der eben 21jährige Abel, der zwei Jahre vorher die Universität zu Christiania bezogen hatte und sich gegenwärtig auf einer Ferienreise in Kopenhagen befand, an seinen Lehrer Holmboe, dass er eine von ihm verfasste Abhandlung dem Professor Degen gezeigt habe und fährt dann fort: »Diese kleine Arbeit handelte, wie Du Dich erinnerst, von den inversen Funktionen der elliptischen Transzendenten und ich hatte darin ein unmögliches Resultat bewiesen. Ich bat Degen, sie von Anfang bis Ende zu lesen, aber er konnte keinen Fehlschluss entdecken, noch begreifen, wo der Fehler stecke; Gott mag wissen, wie ich mich aus der Sache herausziehe«[17].

Es ist für unseren Zweck gleichgültig, ob wir die hier von Abel erwähnte Arbeit in der um dieselbe Zeit oder jedenfalls bald nachher geschriebenen Abhandlung[18], die von der Umkehrung der hyperelliptischen Integrale handelt und bereits die 2p-fache Periodizität ihrer inversen Funktion angibt, wieder erkennen wollen, wie Bjerknes und Pesloüan vorschlagen, oder ob sie, wie wohl mit mehr Recht, Sylow[19] meint, von der Teilung der elliptischen Funktionen handelte, wo der Grad der Gleichung, von deren Lösung die Teilung abhängt, nicht wie im analogen Falle der Kreisteilung der Anzahl der Teile, sondern dem Quadrat dieser Anzahl gleich ist, und wo zwar die Bedeutung der reellen Wurzeln, deren Anzahl mit jener übereinstimmt, leicht ersichtlich ist, wogegen die zahlreichen imaginären ganz unerklärlich erscheinen mussten[20]: in jedem Falle steht fest, dass in Abel die Idee der Umkehrung des elliptischen Integrals schon vor der Mitte des Jahres 1823 entstanden, und dass ihm, da die eben genannte Abhandlung über die Umkehrung des hyperelliptischen Integrals jedenfalls vor seiner grossen Reise geschrieben war, die doppelte Periodizität der inversen Funktion vor der Mitte des Jahres 1825 bekannt war.

Diese letztere Datierung trifft auch für die Auffindung des Abelschen Theorems zu; denn wir finden dieses schon in derselben Gestalt und mit demselben Beweise wie in den späteren Veröffentlichungen in einem gleichfalls vor der grossen Reise geschriebenen Aufsatze Abels[21].

Es wäre allerdings verfehlt, wenn man annehmen wollte, dass Abel damals schon die Natur der durch die Umkehrung des elliptischen Integrals erhaltenen Funktion durchschaut hätte, wie auch der soeben genannte Aufsatz über das Abelsche Theorem so sehr der Vollständigkeit entbehrt, dass man, wie Sylow sagt, in Wahrheit nicht wisse, ob Abel damals seine Untersuchungen noch nicht vollendet oder ob man nur ein Fragment vor sich habe. Es bedurfte noch der Zeit während der grossen Reise, die Abel anfangs September 1825 antrat und die ihn über Berlin, Dresden und Wien nach Paris führte, bis die Ideen in ihm zur Reife gelangten.

Als er am 10. Juli 1826 in Paris angekommen war, ging er bald an die Ausarbeitung seiner Abhandlung über das Abelsche Theorem[22], über deren Fortgang wir durch ein in seinem Nachlasse vorgefundenes Heft, von Sylow als Cahier III bezeichnet, gut orientiert sind. Ende Oktober war die Arbeit vollendet und wurde am 30. der Pariser Akademie von dem Verfasser eingereicht. Das Schicksal dieser Arbeit, einer der grossartigsten mathematischen Abhandlungen, die je geschrieben wurden, ist bekannt; sie blieb zunächst in den Papieren des von der Akademie ernannten Referenten Cauchy, und obwohl Legendre drei Jahre später durch Jacobi dringend auf sie aufmerksam gemacht wurde, auch die Bewunderung Jacobis teilte und sich selbst mit dem Abelschen Theorem beschäftigte, kam es doch erst im Jahre 1841, 12 Jahre nach dem Tode des Verfassers zur Veröffentlichung in den Abhandlungen der Akademie, nicht ohne dass nochmals ein Zwischenfall eintrat, indem während des Druckes das Manuskript verloren ging, so dass die Korrektur ohne dieses gelesen werden musste[23].

In dem gleichen Briefe, vom 24. Oktober 1826, in welchem Abel seinem Freunde Holmboe berichtet, dass er seine grosse Arbeit für die Pariser Akademie vollendet habe und demnächst übergeben werde, erzählt er auch, dass er die soeben im Erscheinen begriffenen Abhandlungen Cauchys lese und dass er sich, dadurch veranlasst, mit dem Imaginären beschäftige, in dem noch viel zu tun sei, und man findet in dem vorhergenannten Hefte alsbald Stellen, in denen er das Imaginäre in die Integrale einführt und sich dadurch über die Perioden der Integrale für den Logarithmus und Arcustangens Klarheit zu verschaffen sucht. Diese Studien waren von entscheidender Bedeutung für das tiefere Erfassen der Natur der elliptischen Funktionen.

In der Tat wandte sich Abels Tätigkeit jetzt wieder diesen zu. Wir finden in dem genannten Hefte Studien über die Transformation, sodann den Satz über die Lemniskatenteilung, über welchen Abel am 4. Dezember 1826 an Crelle und um dieselbe Zeit an Holmboe berichtet, und schliesslich sehen wir den letzten Teil des Heftes angefüllt mit Formeln über elliptische Funktionen, die sich grossenteils in der späteren Abhandlung Abels »Recherches sur les fonctions elliptiques« wiederfinden, aber weder dem Inhalte noch der Form nach sich mit den dortigen vollkommen decken, so dass nicht angenommen werden kann, dass Abel auch nur den ersten Teil dieser Abhandlung schon in Paris niedergeschrieben habe; aber das zeigen sie, dass die Entdeckung der elliptischen Funktionen durch Abel in ihren Hauptpunkten in Paris abgeschlossen war. Er reiste in den letzten Tagen des Jahres 1826 von dort ab und traf nach einem nochmaligen Aufenthalte in Berlin am 20. Mai 1827 wieder in Christiania ein. Erst hier schrieb er seine Abhandlung: »Recherches sur les fonctions elliptiques«[24], deren erster Teil am 20. September 1827 im 2. Hefte des 2. Bandes des J. f. Math. von Crelle erschien; die erste Abhandlung, in der die inversen Funktionen des elliptischen Integrals erster Gattung auftraten.

In demselben Monate, in welchem die Recherches von Abel erschienen, wurden in Schumachers Astronomischen Nachrichten zwei am 13. Juni und 2. August an den Herausgeber gerichtete Briefe des 23jährigen Königsberger Privatdozenten Jacobi veröffentlicht, in welchem dieser seine ersten Entdeckungen in der Transformationstheorie der elliptischen Integrale mitteilt. Jacobi spricht hier ohne Beweis, und zuerst auch noch ohne Angabe des allgemeinen analytischen Transformationsausdrucks, den allgemeinen Satz von der Transformation der elliptischen Integrale 1. Gattung aus, führt die Transformation 3. und 5. Grades wirklich durch und bringt sie mit der Multiplikation und Division für die Zahlen 3 und 5 in Verbindung[25].

Drei Monate später, d. d. 18. November 1827, veröffentlichte Jacobi in dem im Dezember ausgegebenen Hefte der Schumacherschen Nachrichten einen Beweis des im 2. Briefe ausgesprochenen allgemeinen Transformationstheorems und hier in dieser Arbeit tritt nun auch Jacobi mit der Einführung der inversen Funktion des elliptischen Integrals 1. Gattung an die Öffentlichkeit[26].

Als das Septemberheft der Astronomischen Nachrichten mit den ersten Mitteilungen Jacobis zur Kenntnis Abels gelangte, begnügte dieser sich, dem soeben abgeschlossenen 2. Teile seiner »Recherches sur les fonctions elliptiques«, den er am 12. Februar 1828 an Crelle absandte und in welchem er selbst ausser speziellen

Problemen der Division die allgemeine rationale Transformation bearbeitet hatte, eine Nachschrift beizufügen, in der er sagte, dass das Jacobische Theorem als spezieller Fall in seinen Formeln enthalten sei und im wesentlichen mit einer von diesen übereinstimme, und in der er einen Beweis dieses Theorems, der von Jacobis Seite noch ausstand, mitteilte.

Um so stärker war der Eindruck, den die im Dezemberheft erschienene Arbeit Jacobis auf Abel machte. Hansteen erzählt in einem Briefe an Schumacher, dass er diese Abhandlung im April oder Mai 1828 Abel gezeigt habe. Abel sei ganz bleich geworden und habe zum Konditor gehen und einen Schnaps nehmen müssen, um der Erregung Herr zu werden[27]. Das was Abel überraschte, war eben der Gebrauch der inversen Funktion sin am u; er fühlte, dass Jacobi damit in seine eigenste Domäne eingebrochen sei und zugleich, dass alle weiteren Publikationen von seiner Seite die wirksamsten Hilfsmittel für Jacobis weitere Arbeiten bilden mussten. Und in der Tat begann jetzt jener denkwürdige Wettstreit zwischen den beiden Forschern, in welchem sie, der eine sich auf die Resultate und Methoden des andern stützend, zum Teil dieselben Sätze fanden und sich in deren Veröffentlichung abwechselnd zuvorkamen[28].

Über die Priorität in der Veröffentlichung der elliptischen Funktionen ist durch die Tatsache entschieden, dass an dem Tage, an welchem Jacobi mit dem sin am zuerst hervortrat, die Recherches von Abel, in denen sogleich in der Einleitung ausdrücklich gesagt ist, dass die umgekehrten Funktionen der elliptischen Intregale betrachtet werden sollen, schon drei Monate erschienen waren. Aber Abel gebührt auch die Priorität der Entdeckung, denn zu der Zeit, wo er bereits eine Abhandlung über die inversen Funktionen der elliptischen Transzendenten Degen zeigte, fasste Jacobi erst den Entschluss, sich ganz dem Studium der Mathematik zuzuwenden, und zu der Zeit, wo Abel in Paris seine Entdeckung zum vollen Abschluss brachte, klagte Jacobi, dass er bei der Lektüre von Legendres Exercises ganz leer ausgegangen und nicht zum geringsten Einfalle inspiriert worden sei. Trotzdem wird man die Frage, ob Jacobi noch vor Kenntnisnahme der Recherches von Abel und also selbständig zur Einführung der elliptischen Funktionen gekommen sei, angesichts der Mitteilungen, welche er darüber unter dem 12. April 1828 an Legendre macht, bejahen müssen, allerdings mit der Einschränkung, dass sie bis dahin Jacobi nur als Hilfsmittel gedient hatten und er noch nicht daran dachte, sie als Fundament der Theorie an die Stelle der Integrale zu setzen[29].

Aber ein anderer konnte Abel die Priorität zwar nicht der Veröffentlichung, wohl aber der Entdeckung der elliptischen Funktionen mit Erfolg streitig machen: Gauss.

Als Abel am 4. Dezember 1826 Crelle seine Entdeckung der Lemniskatenteilung anzeigte, fügte er hinzu: »Ich habe Grund zu glauben, dass Gauss auch darauf gekommen ist.« Er hat dabei die Stelle im 7. Abschnitt der Disquisitiones arithmeticae im Auge gehabt, wo es heisst: »Übrigens reichen die Prinzipien der Theorie, welche auseinanderzusetzen wir in Angriff nehmen, viel weiter, als sie hier ausgedehnt werden. Denn sie können nicht nur auf die trigonometrischen Funktionen, sondern mit dem gleichen Erfolge auf viele andere transzendente Funktionen angewendet werden, z. B. auf jene, welche von dem Intregale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

abhängen«[30]. Gauss selbst schreibt am 30. Mai 1828 über die Recherches von Abel an Schumacher[31], dass sie ihm von seinen eigenen Untersuchungen wohl $^1/_3$ vorweggenommen hätten und mit diesen zum Teil selbst bis auf die gewählten bezeichnenden Buchstaben übereinstimmten, und Crelle bestätigt in einem Briefe an Abel vom 28. Mai 1828 diese Äusserung von Gauss, indem er sie noch dahin erweitert, dass Gauss gesagt habe, Abel hätte genau denselben Weg eingeschlagen, den er selbst im Jahre 1798 betreten habe.

Auch an Jacobi hatte Gauss, als ihm Schumacher dessen erste Arbeiten über die Transformation der elliptischen Integrale vorgelegt hatte, die Mitteilung gelangen lassen, dass ihm diese Resultate nicht neu seien[32] und es schrieb deshalb Jacobi an Legendre am 5. August 1827 bezüglich seiner Untersuchungen: »Indessen sind sie nicht die einzigen, welche in Deutschland über diesen Gegenstand angestellt wurden. Als Gauss sie kennen gelernt hatte, liess er mir sagen, dass er die Fälle der Drei-, Fünf- und Siebenteilung schon im Jahre 1808 entwickelt und zu gleicher Zeit die zugehörigen neuen Modulketten gefunden habe[33].« Die Mitteilung dieser Ansprüche von Gauss brachte Legendre, da Gauss ihm gegenüber in ähnlicher Weise Prioritätsrechte geltend gemacht hatte, derart in Zorn, dass er sie in einem Briefe vom 30. November 1827 den Gipfel der Unverschämtheit nennt; und auch als Jacobi am 12. April 1828 etwas schüchtern erwidert, dass Gauss allerdings noch nichts über die elliptischen Funktionen publiziert habe, es aber sicher sei, dass er hübsche Sachen darüber besitze, will Legendre in seiner Antwort vom 14. April 1828 nicht glauben, dass man Entdeckungen von solcher Wichtigkeit so lange unveröffentlicht lasse[34].

Und doch war nicht nur Legendre im Irrtum, sondern auch Jacobi, wenn er in seinem vorher erwähnten Briefe vom 12. April 1828 die Hoffnung geäussert hatte, mit seinen Veröffentlichungen Gauss nicht nur zeitlich zuvorgekommen zu sein, sondern ihn auch sachlich überholt zu haben. Dies zeigte sich schon, als 1876 im 3. und 1900 im 8. Bande von Gauss' Werken auf die elliptischen Funktionen bezügliche Papiere aus dessen Nachlass erschienen, und wurde vollständig klar gelegt durch das im Jahre 1903 aufgefundene und im 57. Bande der Math. Ann. veröffentlichte wissenschaftliche Tagebuch von Gauss[35].

Zwar hat sich darin die Angabe Scherings, dass Gauss schon im Jahre 1794, und zwar vom arithmetisch-geometrischen Mittel ausgehend, zu seinen Entdeckungen in der Theorie der elliptischen Funktionen gelangt sei, als unrichtig herausgestellt; aber die Äusserungen von Gauss selber, dass er die Resultate der Recherches von Abel zu erheblichem Teile schon im Jahre 1798 und zwar auf dem gleichen Wege wie Abel gefunden habe, und dass ihm die Transformationsgleichungen Jacobis schon im Jahre 1808 bekannt gewesen seien, haben sich vollinhaltlich bestätigt.

Wir sehen jetzt, wie Gauss erstmals im Jahre 1796, und zwar für den speziellen äquianharmonischen Fall die inverse Funktion des elliptischen Integrals 1. Gattung eingeführt und in eine Potenzreihe entwickelt hat[36].

Wir sehen weiter, wie mit dem Jahre 1797 die Untersuchungen über die Lemniskate beginnen. Es wird die inverse Funktion des lemniskatischen Integrals

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

als sin lemn. eingeführt und dessen Additions-, Multiplikations- und Divisionstheorem entwickelt. Aus dem gleichen Jahre stammen dann noch die Produkt- und Potenzreihenentwicklungen von Zähler und Nenner des sin lemn., Entwicklungen, welche sich mit den Weierstrassschen Al-Funktionen für den speziellen lemniskatischen Fall decken[37].

Im Jahre 1798 zeigt sich sodann der wesentliche Fortschritt, dass Gauss jetzt die lemniskatischen Funktionen als Quotienten unendlicher trigonometrischer Produkte darstellt und diese Produkte in Reihen umsetzt, welche nach trigonometrischen Funktionen der Vielfachen des Arguments fortschreiten, also in ϑ-Reihen[38].

Erst im Jahre 1799 beschäftigt sich Gauss mit dem arithmetisch-geometrischen Mittel, und indem er auf dessen Beziehungen zu den elliptischen Integralen zuerst im lemniskatischen und sodann im allgemeinen Falle aufmerksam wird, wird dies für ihn die Veranlassung, die Theorie der allgemeinen elliptischen Funktionen aufzunehmen und nach dem Muster der lemniskatischen zu entwickeln[39].

Im Jahre 1800 erreicht sodann die Theorie der elliptischen Funktionen bei Gauss bereits ihren ersten Abschluss[40].

So sehen wir, dass schon bald, nachdem Legendre seine ersten Untersuchungen über die elliptischen Integrale veröffentlicht hatte, Gauss den Gedanken der Umkehrung dieser erfasst und sofort in die Tat umgesetzt hat; und von dem speziellen lemniskatischen Falle geleitet, entwickelte er noch, bevor das 18. Jahrhundert zu Ende ging, die Grundzüge der Theorie dieser inversen Funktionen, einschliesslich deren Darstellung durch die ϑ-Reihen. Aber die Resultate dieser Untersuchungen blieben in Gauss' Schreibtisch verschlossen, und so konnte 30 Jahre später Abel in seinen Recherches als der Erste mit den elliptischen Funktionen an die Öffentlichkeit treten. Abel wurde, 27jährig, am 6. April 1829 mitten aus dem reichsten Schaffen durch den Tod gerissen und räumte das Feld dem in diesem Punkte glücklicheren Jacobi, der nun, Abels und seine eigenen

Untersuchungen weiterführend, nicht nur die Theorie der elliptischen Funktionen ausgestaltete, sondern auch die Umkehrung der Integrale in dem hyperelliptischen Falle anbahnte, indem er hier das seinen Namen tragende Umkehrproblem formulierte.

Zwar hatte sich, wie wir gehört haben, schon Abel, und zwar noch vor seiner grossen Reise mit der Umkehrung eines hyperelliptischen Integrals von beliebigem Geschlecht p, d. h. eines Integrals, bei welchem der Integrand aus x und der Quadratwurzel aus einer ganzen rationalen Funktion $2p + 1^{ten}$ oder $2p + 2^{ten}$ Grades von x rational zusammengesetzt ist, beschäftigt und dabei gefunden, dass die inverse Funktion eines solchen Integrals 2p-fach periodisch sei; aber er hat in der kurzen Zeit seiner wissenschaftlichen Arbeit nicht mehr Zeit und Gelegenheit gefunden, sich weiter mit diesem Problem zu beschäftigen[41], sonst hätte er jedenfalls bemerkt, dass man auf diesem Wege nicht zur Lösung des Umkehrproblems der hyperelliptischen Integrale gelangen könne. Denn wie Jacobi schon in einer Abhandlung vom Jahre 1828 aussprach und im Jahre 1834 ausführlich bewies, kann eine einwertige (oder endlich vielwertige) Funktion einer Veränderlichen nicht mehr als 2 Perioden besitzen[42]. Daraus folgt, dass die von Abel betrachtete Funktion keine solche und also in keinem Falle das Analogon der elliptischen Funktionen sein kann.

Die Natur der von Abel eingeführten Funktion wurde erst durch die Riemannsche Abhandlung über die Abelschen Funktionen erschlossen und ist zum ersten Male mit voller Klarheit von Prym auseinandergesetzt worden[43]. Darnach wird durch ein einzelnes Integral 1. Gattung vom Geschlecht p die einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche, in der die Abelschen Integrale eindeutig dargestellt sind, auf ein endliches Flächenstück abgebildet, welches von p Parallelogrammen begrenzt wird. Dieses Flächenstück wird bei Veränderung des Argumentes um Perioden mit sich selbst kongruent wiederholt und diese Wiederholungen bedecken, wenn $p > 1$ ist, die Ebene unendlich oft. Es entsteht also eine unendlich vielwertige 2p-fach periodische Funktion, die allerdings in der Umgebung eines jeden einzelnen Punktes den Charakter einer analytischen Funktion hat, die aber nicht zur Bestimmung der Integralgrenze x durch den

Integralwert u dienen kann, da man einem gegebenen u bei jedem Werte von x durch passende Wahl des Integrationsweges beliebig nahe kommen kann.

Aber Abel hat durch sein Theorem Jacobi den Weg gewiesen, der aus diesen Schwierigkeiten hinausführt. Wir haben schon wiederholt dieses Abelsche Theorem erwähnt, ohne bisher zu sagen, wie es laute. Abel charakterisiert es selbst in seinem Briefe an Crelle vom 9. Oktober 1826 mit den wenigen Worten: »Ich habe eine allgemeine Eigenschaft aller derjenigen Funktionen, deren Differential algebraisch ist, aufgestellt. Diese Eigenschaft besteht darin, dass eine Summe einer beliebigen Anzahl Funktionen durch eine bestimmte Anzahl der nämlichen Funktionen ausgedrückt werden kann«; und er führt dies sofort an dem Beispiele des hyperelliptischen Integrals vom Geschlecht 2 aus, indem er sagt, dass hier die Summe einer beliebigen Anzahl von solchen Integralen stets auf die Summe von zweien reduziert werden kann, und auch angibt, wie die Grenzen dieser Integrale aus den Grenzen der gegebenen berechnet werden können.

Wir sehen in dem Abelschen Theorem die natürliche Fortsetzung des Eulerschen Additionstheorems der elliptischen Integrale. Euler[44] hat selbst bemerkt, dass im hyperelliptischen Falle die Reduktion einer Summe von Integralen auf ein einziges nicht mehr möglich ist, ohne aber die Verallgemeinerung seines Additionstheorems in der Gestalt des Abelschen Theorems vorauszusehen.

Wenn man nun beachtet, dass so im hyperelliptischen Falle vom Geschlecht 2, um bei diesem speziellen Falle zu verweilen, auf den sich die Lösung des Umkehrproblems ohnehin zunächst beschränkte, an die Stelle des einen Integrals vom Eulerschen Additionstheorem eine Summe von 2 Integralen als das einfachste nicht weiter reduzierbare Gebilde tritt, auch dass es solcher Integrale gerade zwei linear unabhängige gibt und nimmt vielleicht noch hinzu, dass das Abelsche Theorem für diese beiden die nämlichen Grenzen liefert, so ist in der Tat der Jacobische Ansatz des Umkehrproblems im Falle $p = 2$ nicht so weit abliegend, wenn ich auch der Äusserung von Bjerknes, dass es dazu, nachdem Jacobi von dem obenerwähnten Briefe Abels an Crelle durch dessen Veröffentlichung im 5. Bande des Journals für Mathematik Kenntnis erhalten, nur des gesunden Menschenverstandes bedurft hätte, nicht beitreten kann.

Jacobi setzt also[45]:

$$\int_{a_1}^{x_1} \frac{\alpha + \beta x}{\sqrt{R(x)}}\, dx + \int_{a_2}^{x_2} \frac{\alpha + \beta x}{\sqrt{R(x)}}\, dx = u_1,$$

$$\int_{a_1}^{x_1} \frac{\alpha' + \beta' x}{\sqrt{R(x)}}\, dx + \int_{a_2}^{x_2} \frac{\alpha' + \beta' x}{\sqrt{R(x)}}\, dx = u_2,$$

wo $R(x)$ eine ganze rationale Funktion 5. oder 6. Grades bezeichnet, und betrachtet x_1, x_2 als Funktionen der beiden Veränderlichen u_1, u_2. Er sagt, dass man diese Funktionen in die Analysis einführen müsse, wenn man die Analogie mit den trigonometrischen und elliptischen Funktionen wahren wolle, und fügt in einer späteren Abhandlung[46] noch hinzu, dass nicht x_1 und x_2 selbst einwertige Funktionen von u_1, u_2 seien, sondern Wurzeln einer quadratischen Gleichung mit einwertigen Koeffizienten.

Gegen diesen Ansatz Jacobis machte Eisenstein[47] geltend, dass man nicht sehe, wie die Sache durch ihn besser geworden sei und wie x_1, x_2 durch u_1, u_2 bestimmt sein könnten; es sei denn, dass man jedem der unendlich vielen Werte, die u_1 infolge der Vielwertigkeit der Integrale annehmen könne, einen ganz bestimmten Wert von u_2 zuordne; aber man müsse erst nachweisen, was unter solchen zusammengehörigen Werten eigentlich zu verstehen sei.

Dieser Einwand Eisensteins ist ganz begründet und gewiss hätte die Jacobische Abhandlung in dieser Richtung einer Ergänzung bedurft. Aber lange bevor Eisenstein seinen Einwand erhob, hatte Jacobi in einer sogleich wieder zu nennenden Vorlesung vom Wintersemester 1835/36 die Abhängigkeit der Integrale zweiwertiger algebraischer Funktionen vom Integrationswege eingehend erörtert[48]. Die von Eisenstein verlangte Erläuterung zu dem Jacobischen Ansatze lautet aber einfach so, dass in beiden Gleichungen die Integrationswege die nämlichen sein müssen.

Eine Lösung seines Umkehrproblems, d. h. eine Angabe darüber, wie man zu Ausdrucksformen der definierten Funktionen:

$$x_1 = \lambda_1 (u_1, u_2),\ x_2 = \lambda_2 (u_1, u_2),$$

beziehungsweise ihrer symmetrischen Verbindungen $x_1 + x_2$ und $x_1 x_2$ gelangen könne, findet sich bei Jacobi nicht. Diese Lösung haben erst 10 Jahre später ziemlich gleichzeitig aber ganz unabhängig voneinander Rosenhain und Göpel gegeben[49].

Ich beginne mit Rosenhain, der Jacobi näher steht. Er war, wie aus dem ersten seiner im 40. Bande des Journals für Mathematik veröffentlichten Briefe an Jacobi[50] hervorgeht, bereits zur Zeit der Abfassung dieses Briefes, 3. September 1844, im Besitze des wesentlichen Teiles der Resultate seiner grossen, am 30. November 1846 der Pariser Akademie eingereichten Abhandlung[51], die von dieser preisgekrönt und 1851 im 11. Bande der sogenannten Mémoires des savants étrangers veröffentlicht wurde. Um zu verstehen, wie Rosenhain zu dieser Lösung des Umkehrproblems gelangte, muss man berücksichtigen, dass Jacobi bereits vorher in Vorlesungen über elliptische Funktionen den historischen Gang der Entwicklung, wie er etwa in den »Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum« zur Darstellung gelangt war, verlassen hatte und, gerade den entgegengesetzten Weg einschlagend, von den Thetafunktionen aus zum elliptischen Integral 1. Gattung, beziehungsweise zur Differentialgleichung des Umkehrproblems vorgedrungen war. Von der ersten derartigen Vorlesung, es ist die vorher erwähnte im Wintersemester 1835/36 gehaltene, existiert gerade von Rosenhain eine Ausarbeitung; sie war diesem also aufs genaueste bekannt[52].

In der Einleitung dieser Vorlesung gibt Jacobi ihren Inhalt selbst folgendermassen an: »Ohne irgend etwas aus der Theorie der elliptischen Transzendenten vorauszusetzen, werde ich von den Reihen Θ, H ausgehend, mit Hilfe eines einfachen Prinzips die Relationen aufstellen, welchen jene Reihen genügen. Aus diesen Relationen werde ich für die Quotienten der Reihen ein Additionstheorem und aus diesem die Differentialformeln herleiten, welche unmittelbar zu den elliptischen Integralen führen«.

Diese Vorlesung hatte Rosenhain vor sich und dazu die Angabe Jacobis, dass man im hyperelliptischen Falle $p = 2$ Funktionen von zwei Veränderlichen benutzen müsse. Er geht nun genau dem Jacobischen Wege nach. Zuerst bildet er den 4 Jacobischen Reihen entsprechend, die auseinander durch Änderung des Arguments um halbe Perioden hervorgehen, die 16 ebenso miteinander zusammenhängenden doppelt unendlichen Reihen $\varphi_{rs}(v, w)$. Hierauf zeigt er, dass für diese 16 Funktionen analoge lineare Relationen zwischen Produkten von je 4 bestehen wie für die 4 Jacobischen ϑ, und erhält daraus durch Spezialisierung der Argumente zuerst die algebraischen Relationen zwischen den 15 φ-Quotienten und hierauf ihre Additionstheoreme. Vermöge der ersteren lassen sich die 15 Quotienten durch 2 unter ihnen, oder wie Rosenhain es tut, durch 2 Parameter x_1, x_2 darstellen; aus den letzteren erhält er schliesslich die Differentiale dv und dw linear durch dx_1 und dx_2 ausgedrückt. Diese Differentialgleichungen haben aber die Form der Differentialgleichungen des Umkehrproblems der hyperelliptischen Integrale vom Geschlecht 2. Da nun die Grössen $x_1 x_2$ und $x_1 + x_2$, genau wie Jacobi verlangt, durch die früheren Relationen als eindeutige Funktionen der beiden Variablen v und w dargestellt sind, so ist gerade durch diese Relationen die Lösung des Umkehrproblems gegeben.

Während sich so Rosenhain aufs engste an die Jacobische Vorlesung anschliesst, ist die Abhandlung Göpels[53] unabhängig davon entstanden. Aus der Einleitung dieser Abhandlung, die der Verfasser im März 1847 dem Journal für Mathematik einreichte, geht hervor, dass er die Jacobische Vorlesung nicht gekannt hat, sondern selbstständig etwa im Jahre 1840 auf den Gedanken kam, die Theorie der elliptischen Funktionen in dem dortigen Sinne zu behandeln; dabei vermutete er, dass diese Methode auch als Fundament für die Theorie höherer Funktionen dienen könne, und wandte sie zunächst auf die hyperelliptischen Funktionen vom Geschlecht 2 an, verschob aber die Veröffentlichung der von ihm angestellten Untersuchungen, bis ihn ein Brief Hermites an Jacobi[54] befürchten liess, ersterer möchte ihm mit ähnlichen Untersuchungen zuvorkommen.

Auch Göpel beginnt, nachdem er die 16 Thetafunktionen zweier Veränderlichen eingeführt hat, die bei ihm mit P, Q, R, S, P', ... S''' bezeichnet sind, mit der Aufstellung der zwischen ihnen bestehenden algebraischen Relationen; er leitet diese aber nicht aus allgemeinen Formeln durch Spezialisierung der Argumente ab, sondern gewinnt sie durch eine Transformation zweiter Ordnung; auch das Endziel der Untersuchung ist ein anderes. Er zeigt, dass man durch die Quadrate von 4 Thetafunktionen P', S', P'', S'' die der 12 übrigen linear ausdrücken kann, dass aber zwischen diesen 4 Funktionen eine Gleichung 4. Grades besteht, die heute unter dem Namen der biquadratischen Göpelschen Relation und als Gleichung der Kummerschen Fläche allgemein bekannt ist. Damit wäre auch für die 15 durch Division mit einer Thetafunktion entstehenden Theta quotienten die Reduktion auf 2 unabhängige geleistet; es fehlen aber bei Göpel die expliziten Ausdrücke der 15 Thetaquotienten durch zwei unter ihnen, beziehungsweise durch zwei unabhängige Parameter. Der Grund dieser Abweichung liegt darin, dass Göpel im weiteren Verlaufe der Arbeit als Parameter zwei Thetaquotienten

$$p = \frac{S'}{P'}, \; q = \frac{S''}{P''}$$

mit verschiedenen Nennern einführt. Durch sie und ihre Differentiale werden jetzt gewisse lineare Verbindungen $d\mu$ und dv der Differentiale der beiden Argumente der Thetafunktionen ausgedrückt. In diesen Ausdrücken sind die Variablen p, q nicht getrennt und es müssen erst an Stelle von p, q durch eine ziemlich weitläufige Rechnung andere Variablen x, x' eingeführt werden; dann erst erhalten $d\mu$ und dv die Formen, wie sie im Umkehrproblem der hyperelliptischen Funktionen vom Geschlecht 2 auftreten.

Wie schon Rosenhain in seinem ersten Briefe an Jacobi angibt, treten ganz neue Schwierigkeiten hinzu, wenn man zum hyperelliptischen Falle $p > 2$ übergeht; denn dann ist die Anzahl der Konstanten des Umkehrproblems $2p - 1$ kleiner als die Anzahl $\frac{1}{2}p\,(p+1)$ der in die p-fach unendliche Thetareihe eintretenden Modulen und es sind daher, wenn es schliesslich doch gelingen sollte, eine Lösung des Umkehrproblems durch Thetafunktionen darzustellen, deren Modulen nicht unabhängig voneinander. Damit ist es aber ausgeschlossen, dass man, wie es im Falle $p = 2$ Göpel und Rosenhain getan haben, aus den zwischen den allgemeinen p-fach unendlichen Thetareihen bestehenden Relationen allein die Differentialgleichungen des Umkehrproblems ableitet. Nun wurde allerdings ziemlich bald bekannt[55], welcher Art die Beziehungen zwischen den Modulen dieser speziellen hyperelliptischen Thetafunktionen sind, und es hätte dann die Möglichkeit bestanden, unter Zuziehung dieser Relationen eine den Göpel-Rosenhainschen Weg einschlagende Lösung des Umkehrproblems zu versuchen. Dieser Versuch ist nicht gemacht worden und wäre auch deshalb von geringerem Werte, weil die Auffindung der in Rede stehenden Beziehungen Hilfsmittel erfordert, nach deren Beschaffung viel bequemere Wege zur Lösung des Umkehrproblems offen stehen.

Die Lösung, welche das Umkehrproblem im hyperelliptischen Falle beliebigen Geschlechts p, dessen Gleichungen übrigens schon Jacobi in seiner Abhandlung vom Jahre 1832 aufgestellt hatte, nunmehr durch Weierstrass fand[56], bewegt sich in der Tat auf einem Wege, welcher von dem von Göpel und Rosenhain betretenen gänzlich verschieden ist. Weierstrass geht unmittelbar von den Integral gleichungen des Umkehrproblems aus und beweist mit Hilfe des Abelschen Theorems den der Hauptsache nach bereits von Jacobi ausgesprochenen Satz, dass die Integralgrenzen $x_1, x_2, \ldots x_p$ die Wurzeln einer algebraischen Gleichung p^{ten} Grades sind, deren Koeffizienten völlig bestimmte eindeutige Funktionen der Integralwerte $u_1, u_2, \ldots u_p$ sind. Hiernach ist jeder symmetrische rationale Ausdruck von $x_1, x_2, \ldots x_p$ eine eindeutige Funktion von $u_1, u_2, \ldots u_p$, und zur Lösung des Umkehrproblems handelt es sich noch um die wirkliche Darstellung dieser Funktionen. Auch Weierstrass geht zu dem Ende nochmals auf die elliptischen Funktionen zurück, und gibt, angeregt durch eine kurze Bemerkung Abels in einem Briefe an Legendre[57], eine Entwicklung dieser Funktionen, ohne sie auf die Transformations- oder Multiplikationsformeln zu gründen. Diese Auffassung der elliptischen Funktionen hatte für ihn den grossen Vorteil, dass sie sich einer Ausdehnung auf den hyperelliptischen Fall fähig erwies, und Weierstrass gelangte so auf einem alle Willkürlichkeit ausschliessenden Wege zu der Darstellung der oben genannten Funktionen als Quotienten zweier beständig konvergenter Potenzreihen. Zähler und Nenner aber ergaben sich als ganze rationale Funktionen von Thetafunktionen von p Veränderlichen, und so wurde Weierstrass zu den Thetafunktionen geführt, deren Form ihm vorher unbekannt war.

Aber noch eine weitere Stufe musste erklommen werden. Abel hatte sein Theorem für Integrale algebraischer Funktionen ausgesprochen, deren Irrationalität durch eine beliebige algebraische Gleichung definiert ist; auch für diese Integrale, die wir heute als die Abelschen bezeichnen, musste ein Umkehrproblem aufgestellt und gelöst werden.

Der erste Versuch der Aufstellung geschah durch Hermite, der der Lösung durch Weierstrass; jener scheiterte an der Unzulänglichkeit der Definition der Integranden 1. Gattung[58], dieser wurde vor seiner Publikation von Riemanns Theorie der Abelschen Funktionen überholt und ist nie an die Öffentlichkeit gekommen; die Form, in welcher Weierstrass später in seinen Vorlesungen die Lösung des Umkehrproblems vorzutragen pflegte, stammt erst aus dem Ende des Jahres 1869[59].

Noch einmal am Schlusse der Geschichte des Umkehrproblems trat in Riemann ein Genie hervor, das helleuchtend seine ganze Umgebung überstrahlte, das mit kühnem Griffe alle bisherigen Werte umwertend sich die Mittel schuf, jene Aufgaben spielend zu lösen, an denen seine Vorgänger in langer mühsamer Arbeit sich abgeplagt hatten. Riemann war es insbesondere beschieden, das Umkehrproblem, an dem nun schon so viele Hände gearbeitet hatten, in seiner Theorie der Abelschen Funktionen zum vollen Abschluss zu bringen.[60]

Es kommen hiezu hauptsächlich zwei Leistungen Riemanns in Betracht, einmal die Bildung der Integranden 1. Gattung mittels der φ-Funktion, sodann die Schaffung der Riemannschen Thetafunktion als Funktion einer einzigen Stelle der Riemannschen Fläche. Die eine ermöglichte die Formulierung des Umkehrproblems, die andere brachte zu dessen Lösung eine solche Fülle des Materials, dass es sich fernerhin nur noch darum handelte, unter diesem das für den jeweiligen Zweck brauchbarste auszuwählen.

Wohl war diese Aufgabe für die nächsten, die kamen, keine leichte; denn die Riemannsche Abhandlung war bei der Neuheit ihrer Gedanken und ihrer knappen Darstellungsform schwer verständlich, namentlich an jenen Stellen, wo wie beim Umkehrproblem alles nur kurz angedeutet ist. Es hat daher, wie Christoffel[61] sagte, der Schüler Riemanns, mein hochverehrter Lehrer Prym, sich ein unbeschreibliches Verdienst um das Verständnis Riemanns dadurch erworben, dass er in seiner Abhandlung zur Theorie der Funktionen in einer zweiblätterigen Fläche[62] die Lehre von den hyperelliptischen Funktionen in Riemannschem Geiste darstellte und so den Mathematikern zum Bewusstsein brachte, welche mächtigen Mittel die Riemannsche Theorie besässe. Da kam es ihnen insbesondere zum Bewusstsein, dass die Frage des Umkehrproblems auch im allgemeinen Abelschen Falle in ihr endgültig gelöst sei, dass die Krönung des Baues geschehen sei und des Richtbaums lustige Blätter im Winde flattern.

Wenn wir Mathematiker Nichtfachgenossen mit den Gegenständen der Forschung in höheren Teilen unserer Wissenschaft bekannt zu machen versuchen, so rufen wir nur zu oft die Frage hervor, was man denn mit dem allen machen könne. Diese Frage scheint auch schon vor 150 Jahren an Euler herangetreten zu sein, und ich kann nichts Besseres tun, als die Antwort hersetzen, die er darauf gegeben hat, indem er sagt[63]:

»Wenn man die mathematischen Spekulationen auf ihren Nutzen ansieht, so scheinen sie in zwei Klassen geteilt werden zu müssen; in die erste Klasse sind jene zu zählen, die dem gewöhnlichen Leben oder anderen Wissenszweigen irgend einen sichtbaren Vorteil gewähren, und deren Wertschätzung daher nach der Grösse dieses Vorteils bemessen zu werden pflegt. Die andere Klasse umfasst diejenigen Spekulationen, die, wenn sie auch mit keinem bemerkbaren Vorteil verbunden sind, doch so gestaltet sind, dass sie die Gelegenheit bieten, die Grenzen der Analysis hinauszuschieben und die Kräfte unseres Geistes zu schärfen. Da nämlich sehr viele Forschungen, von denen man sich grossen Nutzen erwarten könnte, einzig wegen der Unzulänglichkeit der Analysis verlassen werden müssen, so ist wohl denjenigen Spekulationen kein geringer Wert beizumessen, die einen nicht zu verachtenden Zuwachs für die Analysis versprechen.«

Was hier Euler von der Wissenschaft sagt, das gilt auch von dem einzelnen, und ich möchte daher für Euch, liebe Kommilitonen, aus der Eulerschen Antwort die Mahnung ableiten, bei dem Unterrichte, den wir Euch geben, nicht ängstlich zu fragen, was man mit jedem einzelnen Vortragsgegenstande anfangen, ob man ihn auch später brauchen könne. Auch der einzelne muss gar vieles lernen, um die Kräfte seines Geistes zu schärfen, damit er nicht später wegen Unzulänglichkeit dieser Kräfte an Problemen scheitert, deren Lösung sein Beruf von ihm verlangt.

Uns Forschern liegen derartige Gedanken ferne; uns hat der Reiz, der in der Entdeckung neuer Wahrheiten oder neuer Wege liegt, zu sehr umfangen, als dass wir bei jedem unserer Schritte nach dessen Nutzen frügen. Wir müssen es daher dankbar anerkennen, wenn ein hochherziger Fürst und seine weise Regierung an den Hochschulen des Landes Pflegestätten der Wissenschaft unterhält, an denen es uns ermöglicht ist, neben der Aufgabe des Lehrers auch der des Forschers nachzugehen. Dankbar begrüssen wir es, wenn diesem Teile unserer Arbeit Verständnis und Anerkennung entgegengebracht wird; dankbarst aber, wenn unser erhabener Fürst selbst seinem Wohlwollen für unsere Hochschule durch sein gnädiges Erscheinen an unserem Feste ein weithin sichtbares Zeichen gibt.

Dieser Dankbarkeit Ausdruck zu geben, fordere ich Sie, meine verehrten Kollegen und meine lieben Kommilitonen, auf, mit mir einzustimmen in den Ruf:

Seine Königliche Hoheit Grossherzog Friedrich

Hoch! Hoch! Hoch!

Anmerkungen.

[1] Jacobi, Considerationes generales de transcendentibus abelianis. J. f. Math. Bd. 9, 1832, pag. 394, u. ges. Werke Bd. 2., pag. 5: »quippe quae, ut de aliis taceam, pro quolibet valore argumenti u valorem unicum ac determinatum habet; evolvi potest in seriem secundum dignitates ipsius u progredientem, quae pro omnibus argumenti valoribus et realibus et imaginariis convergit; discerpi potest in factores lineares, qui determinantur valoribus ipsius u, pro quibus functio evanescit; denique gaudet illa proprietatibus omnibus functionis ipsius u rationalis integrae.«

[2] Legendre, Exercises de calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures. Paris 1811, p. 1: »Après avoir épuisé les formules différentielles qui s'intègrent tant algébriquement que par arcs de cercle ou par logarithmes, les Géomètres s'occupèrent de rechercher toutes celles qui sont intégrables par les arcs d'ellipse ou par les arcs d'hyperbole. On avait lieu de croire que ces transcendantes tenaient le premier rang après les fonctions circulaires et logarithmiques. . . . . Les formules qu'ont peut intégrer par cette voie se trouvèrent très nombreuses; mais il n'y avait point de liaison entre les résultats et ils étaient loin de former une théorie.«

[3] Elliptische Integrale finden sich erstmalig und zwar zur Rektifikation der Ellipse sowie der verlängerten und verkürzten Zykloide 1659 bei Wallis (vgl. dazu Kutta, Elliptische und andere Integrale bei Wallis. Bibl. math. (3) Bd. 2. 1901, p. 230). Sodann gab bei Jakob Bernoulli 1691 Anlass zu einem elliptischen Integrale die Aufgabe, jene Kurve zu rektifizieren, in welche eine Parabel übergeht, wenn man ihre Achse auf einem Kreise aufwickelt, der parabola helicoidis oder spiralis parabolica. (Specimen calculi differentialis in dimensione parabolae helicoidis, ubi de flexuris curvarum in genere, earundem evolutionibus, aliisque. Acta Erud. Lips. 1691 Jan. p. 13; Opera Bd. 1, p. 431; vgl. dazu M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. 3, 2. Aufl. 1901, p. 481 und Enneper, Elliptische Funktionen. Theorie und Geschichte. 1876. p. 472, 2. Aufl. 1890, p. 526.) Die Rektifikation der elastischen Kurve und der Lemniskate führten Jakob Bernoulli auf weitere elliptische Integrale (Curvatura laminae elasticae, ejus identitas cum curvatura lintei a pondere inclusi fluidi expansi, radii circulorum osculantium in terminis simplicissimis exhibiti, una cum novis quibusdam theorematis huc pertinentibus etc. Acta Erud. Lips. 1694 Juni p. 262, Opera Bd. 1, p. 576; Solutio problematis Leibnitiani de curva accessus et recessus aequabilis a puncto dato, mediante rectificatione curvae elasticae. Acta Erud. Lips. 1694 Juni p. 276, Opera Bd. 1, p. 601; Constructio curvae accessus et recessus aequabilis, ope rectificationis curvae cujusdam algebraicae; addenda nuperae solutioni mensis Junii. Acta Erud. Lips. 1694 Sept. p. 336; Opera Bd. 1, p. 608; Explicationes, annotationes et additiones ad ea quae in actis superiorum annorum de curva elastica, isochrona paracentrica et velaria, hinc inde memorata et partim controversa leguntur; ubi de linea mediarum directionum, aliisque novis. Acta

Erud. Lips. 1695 Dez. p. 537; Opera Bd. 1, p. 639; vgl. Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte; deutsch von Schütte. 1902, p. 582 und 199); aber so wichtig gerade diese letztere Kurve bald für die Theorie der elliptischen Integrale werden sollte, so knüpfte sich der nächste Fortschritt doch nicht an sie, sondern an eine Eigenschaft der parabolischen Spirale. Jakob Bernoulli gibt nämlich an, dass zwar die Rektifikation der Kurve nicht ausführbar sei, weil sich das für die Bogenlänge erhaltene Integral nicht durch die gewöhnlichen Funktionen darstellen lasse, dass man aber auf der Kurve unendlich viele Paare gleichlanger Bogen angeben könne. Diese Bemerkung gab den Anstoss zu einer Reihe ähnlicher Fragestellungen, welche für die Entwicklung der Theorie der elliptischen Integrale zunächst massgebend wurden.

Johann Bernoulli warf nämlich jetzt die Frage auf, ob man imstande sei, Paare von Kurvenbögen anzugeben, deren Differenz sich durch einen Kreisbogen (Meditatio de dimensione linearum curvarum per cirulares. Acta Erud. Lips. 1695 Aug. p. 374; Opera Bd. 1, p. 142) oder durch eine gerade Strecke (Theorema universale rectificationi linearum curvarum inserviens; nova parabolarum proprietas; cubicalis primariae arcuum mensura etc. Acta Erud. Lips. 1698 Oct. p. 462; Opera Bd. 1, p. 249) messen lasse. Je nachdem er sich dabei die beiden Bögen auf verschiedenen oder auf derselben Kurve liegend dachte, nannte er die Kurve »mit einer anderen oder mit sich selbst verglichen rektifizierbar«, und er spricht ohne Beweis aus, dass jede parabolische Kurve in diesem Sinne entweder mit einer anderen Kurve der gleichen Art oder mit sich selbst verglichen rektifizierbar sei, auch, dass die erste kubische Parabel $y = x^3$ diese letztere Eigenschaft besitze. Auch hier muss auf Wallis hingewiesen werden, der bereits aus der Form der Bogendifferentiale auf die Gleichheit entsprechender Bogen der von ihm betrachteten Zykloiden mit denen passend gewählter Ellipsen schliesst, die Priorität an diesem Satze, der sich gleichzeitig auch bei Pascal findet, aber Wren zuschreibt (vgl. dazu Kutta a. a. O., p. 232).

An Johann Bernoulli knüpfte Fagnano an, indem er 1714 an die Mathematiker die Aufforderung richtete, »auf der biquadratischen Parabel $y = x^4$ zu einem gegebenen Kurvenstück ein zweites so zu bestimmen, dass die Differenz beider rektifizierbar sei« (Avvertimento. Giornale de' letterati d'Italia Bd. 19, 1714, p. 438. Produzioni matematiche del Conte Guilio Carlo di Fagnano, Marchese de'Toschi etc. Pesaro 1750, Bd. 2, p. 315), und im Jahre darauf zeigte er, dass diese Aufgabe für jede parabolische Kurve

$$a^{\frac{1}{2}m}\, y = \frac{2}{m+2}\, x^{\frac{1}{2}m+2}$$

gelöst sei, sobald man eine Substitution $x = f(\xi)$ gefunden hat, durch welche der Differentialausdruck

$$\frac{dx}{\sqrt{a^m + x^m}}$$

in den gleich gebauten in ξ übergeht, wie z. B. im Falle $m = 4$ durch $x = \frac{a^2}{\xi}$ geschieht. (Nuovo metodo per rettificare la differenza di due archi (uno de' quali e dato) in infinite specie di parabole irrettificabili colla soluzione del problema proposto nel XIX. tomo del giornale de'letterati d'Italia, e colla maniera di tagliare per metà il quadrante della curva lemniscata. Giorn. de'lett. d'Italia Bd. 22, 1715, p. 229; Produzioni Bd. 2, p. 317 und: Giunta al precedente schediasma sopra la maniera di rettificare la differenza di due archi in infinite specie di curve paraboliche irrettificabili con una nuova proprietà della parabola d'Archimede, ec. Giorn. de'lett. d'Italia Bd. 24, p. 363; Produzioni Bd. 2, p. 331, vgl. dazu Cantor a. a. O. Bd. 3, 2. Aufl. 1901, p. 485, Enneper a. a. O. 1876, p. 474, 2. Aufl. 1890, p. 527).

1716 wurde dann durch Fagnano auf gleiche Weise die Aufgabe für die Ellipse und Hyperbel gelöst, Bogenpaare mit rektifizierbarer Differenz zu bestimmen (Theorema da cui si deduce una nuova misura degli archi ellittici, iperbolici e cicloidali. Giorn. de'lett. d'Italia Bd. 26, 1716, p. 266; Produzioni Bd. 2, p. 336; vgl. dazu Cantor a. a. O. p. 488; Enneper a. a. O. p. 457 bez. p. 514).

Endlich aber war es die Lemniskate, der Fagnano seine besondere Aufmerksamkeit schenkte. Schon in der ersten seiner Abhandlungen (die Angabe Cantors, dass die älteste Abhandlung Fagnanos über die Lemniskate erst aus dem Jahre 1718 stamme, ist, wie schon der Titel der Abhandlung von 1715 zeigt, unrichtig) hatte er gelehrt, den Quadranten der Lemniskate zu halbieren, und in weiteren Abhandlungen (Metodo per misurare la lemniscata. Schediasma I. Giorn. de' lett. d'Italia Bd. 29, 1717, p. 258; Produzioni Bd. 2, p. 343; Giunta a questo primo schediasma sopra la misura della lemniscata. Giorn. de' lett. d'Italia Bd. 34, p. 197; Produzioni Bd. 2, p. 349, und: Metodo per misurare la lemniscata. Schediasma II. Giorn. de' lett. d'Italia Bd. 30, p. 87; Produzioni Bd. 2, p. 356; vgl. dazu Cantor a. a. O. p. 491, Enneper, a. a. O. p. 477 bez. p. 531) zeigte er, dass man ihn in ähnlicher Weise in 3 und 5 und weiter in 2^m, 3.2^m, 5.2^m gleiche Teile teilen könne. Welche Bedeutung Fagnano selbst diesem Resultate beimass, ergibt sich aus den Worten, mit denen er seine Abhandlung schloss, noch mehr aber daraus, dass er auf dem Titelblatte seiner »Produzioni matematiche«, in denen er 1750 seine sämtlichen Abhandlungen vereinigte, eine Lemniskate mit der Überschrift »Deo veritatis gloria« anbrachte und anordnete, dass Figur und Überschrift auf seinem Grabsteine wiederholt werden sollten.

4 Wir finden in dem Briefwechsel zwischen Jacobi und P. H. von Fuss (Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. Fuss über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers; herausgegeben von Stäckel und Ahrens. 1908, p. 23) in einem Briefe vom 24. Oktober 1847 die Mitteilung des ersteren, dass er den alten Protokollen der Berliner Akademie die Liste jener Abhandlungen entnommen habe, die Euler in den verschiedenen Sitzungen gelesen hat, und er fährt dann fort: »Bei dieser Gelegenheit habe ich auch einen für die Geschichte der Mathematik ungemein wichtigen Tag gefunden, an welchem unsere Akademie Euler auffordert, das ihr von Fagnano übersandte Werk zu prüfen, ehe man dem Verfasser antworte. Aus dieser Prüfung ist die Theorie der elliptischen Funktionen entstanden.« Der hier von Jacobi angezogene Eintrag in den Akten der Akademie lautet (a. a. O. p. 31): »1751. 23. Dez. M. le Président présente un ouvrage de géometrie en italien en 2 volumes in 4°, que M. le Marquis de Fagnano son Auteur envoie à l'Academie. M. Euler prendra la peine de l'examiner, avant qu'on fasse réponse.«

Die im folgenden den Titeln der Eulerschen Abhandlungen in eckigen Klammern beigefügten Zahlen beziehen sich auf die in dem genannten Werke von Stäckel und Ahrens abgedruckten Fussschen Liste der Eulerschen Werke.

5 Euler, Solutio problematum rectificationem ellipsis requirentium. d. d. 5. VI. 1735. Comment. Petrop. Bd. 8, p. a. 1736 (1741) p. 86 [353], und: Animadversiones in rectificationem ellipsis. d. d. 11. IX. 1749, Opusc. var. arg. Bd. 2, 1750, p. 121 [355]. In der ersten Abhandlung wird die Aufgabe gelöst: Auf einer Schar von Ellipsen mit gleicher einen Achse und gemeinsamen Scheitelpunkte A von diesem aus gleichlange Bogenstücke abzuschneiden; dabei kann A der Endpunkt der gleichen oder der ungleichen Achsen sein. In der zweiten Abhand-

lung wird für die Länge des Ellipsenquadranten von den Halbachsen $1, p$ und der Exzentrizität $n = \sqrt{1-p^2}$ die Reihenentwicklung:

$$\frac{\pi}{2}\left\{1 - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 2}n^2 - \frac{1\cdot 1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}n^4 - \frac{1\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}n^6 - \ldots\right\}$$

abgeleitet.

[6] In einer vom 27. Januar 1752 datierten Abhandlung (Observationes de comparatione arcuum curvarum irrectificabilium. Novi Comment. Petrop. Bd. 6 p. a. 1756/57 (1761), p. 58 [423]) entnimmt Euler den Produzioni Fagnanos die dort der Lemniskatenteilung zugrunde gelegte Tatsache, dass das Bogendifferential

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

dieser Kurve durch die Substitution:

$$x = -\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}} \tag{1}$$

in sich übergehe. Er gewinnt aber diesem Ergebnis eine neue Seite ab, indem er die Beziehung (1) in rationaler Form:

$$x^2 y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{2}$$

als ein partikuläres Integral der Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0 \tag{3}$$

auffasst, so wie $x + y = 0$ auch eines ist. In der nächsten Abhandlung vom 30. April 1753 (De integratione aequationis differentialis

$$\frac{m\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{1-y^4}}.$$

Novi Comment. Petrop. Bd. 6 p. a. 1756/57 (1761), p. 57 [269]) findet er bereits das vollständige Integral

$$x^2 + y^2 - c^2 + c^2 x^2 y^2 + 2\,xy\sqrt{1-c^4} = 0, \tag{4}$$

welches eine willkürliche Konstante c enthält und für $c = 1$ und $c = 0$ in die beiden genannten partikulären übergeht. Indem aber endlich Euler dieses Resultat so ausspricht, dass die Gleichung (4) der zwischen den transzendenten Funktionen:

$$\Pi(z) = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} \tag{5}$$

bestehenden Beziehung:

$$\Pi(x) + \Pi(y) = \Pi(c) \tag{6}$$

in algebraischer Form Ausdruck gebe, und sodann die Untersuchung auf das allgemeine elliptische Integral 1. Gattung ausdehnt, erhält er das Additionstheorem dieser als das erste bedeutende Resultat ihrer Theorie.

Euler blieb hierbei nicht stehen. Wie ihn die Vergleichung von Lemniskatenbögen auf das Additionstheorem der elliptischen Integrale 1. Gattung geführt hatte, so diente ihm die ebenfalls von Fagnano geleistete Vergleichung von Ellipsenbögen zur Gewinnung des Additionstheorems der elliptischen Integrale 2. Gattung, und später hat Euler das Theorem auch für Integrale 3. Gattung aufgestellt.

Eingeleitet wurden diese Arbeiten Eulers durch die im Jahre 1754 in den Nova Acta Erud. Lips. p. 40 von ihm anonym erlassene Aufforderung, einen Satz zu beweisen und ein Problem zu lösen. Durch den Satz wurde die Hälfte des Ellipsenumfangs in zwei Teile so geteilt, dass die Differenz der beiden Teile rektifizierbar wurde; das Problem verlangte die Halbierung des Ellipsenquadranten. Euler gab selbst Beweis und Lösung in der Abhandlung: Demonstratio theorematis et solutio problematis in Actis Erud. Lipsiensibus propositorum. Novi Comment. Petrop. Bd. 7 p. a. 1758/59 (1761), p. 128, d. d. 18. Oktober 1755 [348], der die beiden wohl gleichzeitigen Abhandlungen: Specimen novae methodi curvarum quadraturas et rectificationes, aliasque quantitates transcendentes inter se comparandi. Novi Comment. Petrop. Bd. 7 p. a. 1758/59 (1761), p. 83 [424], und: Specimen alterum methodi novae quantitates transcendentes inter se comparandi; de comparatione arcuum ellipsis. Novi Comment. Petrop. Bd. 7 p. a. 1758/59 (1761), p. 3 [352] vorausgehen. Eine ausführliche Umarbeitung dieser 3 Abhandlungen von Eulers eigener Hand findet sich unter dem Titel: De comparatione arcuum curvarum irrectificabilium. Op. post. Bd. 1 1862, p. 452 [54 p. 166].

Es folgen dann die Abhandlungen: Integratio aequationis

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}}$$

d. d. 19. Dezember 1765. Novi Comment. Petrop. Bd. 12 p. a. 1766/67, (1768), p. 3 [270] und: Evolutio generalior formularum comparationi curvarum inservientium, d. d. 19. Dezember 1765. Novi Comment. Petrop. Bd. 12 p. a. 1766/67 (1768), p. 42 [342], sowie das 6. Kapitel des 1. Bandes der Institutiones calculi integralis. 1768, p. 389: De comparatione quantitatum transcendentium contentarum in forma:

$$\int \frac{P\,\delta z}{\sqrt{(A+2Bz+Czz+2Dz^3+Ez^4)}};$$

und hierauf: Plenior explicatio circa comparationem quantitatum in formula integrali

$$\int \frac{Z\,\delta z}{\sqrt{1+mzz+nz^4}}$$

contentarum, denotante Z functionem quamcunque rationalem ipsius zz, d. d. 14. Oktober 1775. Acta Petrop. Bd. 5 p. a. 1781, Pars. II (1785), p. 3. Abgedruckt als Supplementum VII (ad Tom. 1, Sect. II, Cap. V) im 4. Bande der Institutiones calculi integralis. [281], sowie: Uberior evolutio comparationis quam inter arcus sectionum conicarum instituere licet. Acta Petrop. Bd. 5, p. a. 1781. Pars posterior p. 23 [346].

Jetzt erst scheint Euler von der Abhandlung Lagrange's: Sur l'intégration de quelques équations différentielles dont les indéterminés sont séparées, mais dont chaque membre en particulier n'est point intégrable. Misc. Taur. Bd. 4, 1766/69. Oeuvres Bd. 2 p. 5, Kenntnis genommen zu haben; denn darauf beziehen sich die nun folgenden Abhandlungen Eulers: Dilucidationes super methodo elegantissima, qua illustris de la Grange usus est in integranda aequatione differentiali

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

Acta Petrop. Bd. 2 p. a. 1778 (1780), p. 20, auch Institut. Calcul. Integr. Bd. 4 Suppl. VIII. d. d. 16. Oktober 1877 [282]; Methodus succinctior comparationes quantitatum transcendentium in forma:

$$\int \frac{P\delta z}{\sqrt{(A + 2Bz + Czz + 2Dz^3 + 2z^4)}}$$

contentarum inveniendi, d. d. 3. November 1777. Instit. Calcul. Integr. Bd. 4 1794, p. 504 [283]; Exempla quarundam memorabilium aequationum differentialium, quas adeo algebraice integrare licet, etiamsi nulla via pateat variabiles a se invicem separandi. Nova Acta Petrop. Bd. 13, p. a. 1795 96 (1802), p. 3, d. d. 19. Januar 1778 [267]. Vgl. dazu Cantor, a. a. O. Bd. 4, 1908, p. 794; Enneper, a. a. O. p. 480, bez. 533, sowie: Brill und Nöther, Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit. Bericht erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 3. Bd. 1892/93. (1894), p. 207.

[7] Euler und Lagrange gingen, um Integrationsmethoden für die Differentialgleichung (3) zu finden, wiederholt auf die Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = 0 \tag{7}$$

zurück, deren Eigenschaft, ein doppeltes Integral, einmal in der transzendenten Form:

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin a, \tag{8}$$

dann in der algebraischen

$$x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = a \tag{9}$$

zu besitzen, von ihnen nicht unbemerkt blieb. Es verdient übrigens hervorgehoben zu werden, dass auf die Eigentümlichkeit der Differentialgleichung (7) aus zwei ganz gleich gebauten, für sich nicht algebraisch integrierbaren Gliedern zu bestehen und doch ein algebraisches Integral (9) zu besitzen, schon von Johann Bernoulli in einem Briefe an Leibniz vom 8./18. Juni 1695 (vgl. Leibnizens mathem. Schriften, herausgegeben von Gerhardt, Bd. 3, 1855, p. 185) hingewiesen wurde. Bernoulli bemerkt noch dazu, dass daraus für die transzendente Arcussinuskurve die Eigenschaft folge, dass für sie beliebig viele Punkte auf algebraischem Wege bestimmt werden können.

[8] Maclaurin, Treatise of fluxions, Edinburgh 1742; französ. Übers.: Traité des fluxions; trad. par Pezenas, Paris 1749; vgl. dazu Cantor, a. a. O. Bd. 3, 2. Aufl., 1901, p. 870.

[9] d'Alembert, Recherches sur le calcul integral. Hist. del' Acad. à Berlin 1746. Seconde partie: Des différentielles qui se rapportent à la rectification de l'ellipse ou de l'hyperbole p. 20; vgl. dazu Cantor, a. a. O., p. 872.

[10] Euler, Consideratio formularum, quarum integratio per arcus sectionum conicarum absolvi potest, d. d. 1. Dezember 1760. Novi Comment. Petrop. Bd. 8, p. a. 1760/61 (1762) p. 129 [206]; De reductione formularum integralium ad rectificationem ellipsis ac hyperbolae. Novi Comment. Petrop. Bd. 10, p. a. 1764 (1766), p. 3 [207]; De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus ellipticos metiri licet. Nova Acta Petrop. Bd. 5, p. a. 1787 (1789), p. 71 [419]; De infinitis curvis algebraicis, quarum longitudo indefinita arcui elliptico aequatur. Mém. post. 1830, Bd. 2, p. 95 [420]. Vgl. dazu Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. 4, 1908, p. 836. Enneper, Elliptische Funktionen, p. 484, bez. 536.

[11] Euler, De reductione etc. Novi Comment. Bd. 10, p. 3: ». . . haud exigua spes affulgeat, his rectificationibus in calculo aeque commode utendi atque adhuc arcus circulares et logarithmos adhibere sumus soliti . . . Imprimis autem hic idoneus signandi modus desiderari videtur, cujus ope arcus elliptici aeque commode in calculo exprimi queant ac jam logarithmi et arcus circulares ad insigne Analyseos incrementum per idonea signa in calculum sunt introducti. Talia signa novam quandam calculi speciem suppeditabunt, cujus hic quasi prima elementa exponere constitui . . . Quemadmodum autem omnes arcus circulares ad circulum, cujus radius unitati aequalis statuitur, referri solent, ita etiam pro omnibus sectionibus conicis, quas in calculum recipere volumus, mensuram quandam fixam unitate exprimendam assumi conveniet, quae ad omnes species aeque pertinet.«

[12] Euler, Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum. Editio nova. 1790, p. 298. Die hier angezogene Stelle p. 310 lautet: ». . . ad hoc autem necesse est, ut formulam superiorem integralem diligentius scrutemur, valoresque, quos ad quodvis tempus recipit, quodammodo assignare valeamus. In quo negotio cum alia subsidia analytica vix plus luminis polliceantur, quam ejus reductio ad arcus sectionum conicarum, ad subsidium quoddam mechanicum confugiamus, motum scilicet penduli per circulum; quandoquidem hujus motus determinatio simili formula integrali continetur, hoc tamen non obstante, qualis hic motus sit futurus, quodammodo aestimare licet.« Die Worte »hoc tamen non obstante« sind wörtlich wohl mit »ein Umstand, der aber hier nicht hinderlich ist« zu übersetzen; die Übersetzung von Wolfers in seiner deutschen Ausgabe von Leonhard Eulers Theorie der Bewegung fester oder starrer Körper, 1853, p. 390: »diese aber nicht widersteht«, dürfte nicht zutreffen. Auf obige Stelle in Eulers Mechanik wurde ich durch Herrn Stäckel aufmerksam gemacht, vgl. dessen Artikel IV, 6 Elementare Dynamik der Punktsysteme und starren Körper in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, 4. Bd., 1. Teilband, p. 617.

[13] Dirichlet, Gedächtnisrede auf Carl Gustav Jacob Jacobi. Jacobis Ges. Werke Bd. 1, p. 9.

[14] Legendre, Mémoire sur les intégrations par d'arcs d'ellipse. Hist. de l'Acad. 1786, (1788), p. 616; Second mémoire sur les intégrations par arcs d'ellipse et sur la comparaison de ces arcs. Hist. de l'Acad. 1786, (1788), p. 644; Mémoire sur les transcendantes elliptiques, Paris 1793; Exercises de calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures, Paris 1811; Traité des functions elliptiques et des intégrales Eulériennes, 3 Vol., Paris 1825—28.

[15] Vgl. dazu z. B. in den Exercises p. 97: »On peut par ces méthodes déterminer la fonction F en connaissant son amplitude ou réciproquement déterminer l'amplitude en connaissant la fonction«, ferner p. 380: »Les mêmes formules servent à resoudre le problème inverse, c'est à dire, à déterminer l'amplitude φ, quand on connaît la fonction $F(c, \varphi)$« und im Traité p. 383: »ainsi étant donée une valeur quelconque de l'angle ψ, on pouvra trouver la valeur correspondante du temps t et réciproquement«. Es scheint mir daher nicht ganz zutreffend, wenn Jacobi in einer für A. v. Humboldt gemachten geschichtlichen Aufzeichnung sagt: »Die Scheu des hauptsächlich numerische Wertbestimmungen bezweckenden Mathematikers vor dem Imaginären war die Ursache, dass Legendre der wichtigste Fortschritt der neueren Analysis, die Einführung der doppelt periodischen Funktionen entgangen ist« (aus Königsberger, Carl Gustav Jacob Jacobi. Festschrift. Leipzig 1904, p. 54).

[16] Vgl. dazu die Briefe Legendres an Jacobi vom 9. Februar 1828, 16. Juni 1828 und 8. April 1829 in Jacobis Ges. Werken, Bd. 1, p. 407, 421 und 440; auch eine Bemerkung in Jacobis Aufsatz: Zur Geschichte der elliptischen und Abelschen Transzendenten. Ges. Werke Bd. 2, p. 519.

[17] »Den lille Afhandling som Du erindrer handlede om de omvendte Funktioner af Transcendantes elliptiqves, og hvori jeg havde beviist noget umueligt har jeg bedet ham laese igjennem; men han kunde ikke opdage nogen Feilslutning, eller begribe hvori Feilen stak; Gud veed hvorledes jeg skal komme ud deraf.« Niels Henrik Abel. Memorial publié à l'occasion du centennaire de sa naissance. Texte original des lettres écrites par Abel en norvégien, p. 5. Abel gebraucht hier die Worte »Transcendantes elliptiqves«, um die elliptischen Integrale zu bezeichnen; ebenso wie Legendre für diese »fonctions elliptiques« gesagt und diese Benennung gegen die Einwände Jacobis aufrecht gehalten hat (vgl. die Briefe von Legendre an Jacobi vom 16. Juli 1829 und von Jacobi an Legendre vom 19. August 1829 in Jacobis Ges. Werken Bd. 1, p. 451 u. f.). Wir verstehen heute nach Jacobis Vorgang unter elliptischen Transzendenten oder elliptischen Funktionen ausschliesslich die inversen Funktionen der elliptischen Integrale.

[18] Abel, Propriétés remarquables de la fonction $y = \varphi x$ déterminée par l'équation $fy\,dy - dx\sqrt{(a-y)(a_1-y)(a_2-y)\ldots(a_m-y)} = 0$, fy étant une fonction quelconque de y qui ne devient pas nulle ou infinie lorsque $y = a$, $a_1, a_2, \ldots a_m$. Œuvres complètes. Nouvelle édition par Sylow et Lie. Bd. 2. 1881, p. 40.

[19] Hiezu und zu dem im folgenden über Abel Gesagten vgl. Bjerknes, Niels-Henrik Abel. Tableau de sa vie et de son action scientifique. Trad. franç. 1885 (Rezensionen von Brunel und Bertrand in Darboux Bull. (2) B. 9, 1. Teil, p. 141 und 190, auch in den Fortschritten der Math. Bd. 17, p. 14), Pesloüan, N.-H. Abel. Sa vie et son œuvre. 1906, insbesondere aber das schon genannte »Memorial« mit den Aufsätzen von Holst: Introduction historique und von Sylow: Les études d'Abel et ses découvertes.

[20] Nach Dirichlet, Gedächtnisrede etc. Jacobis Ges. Werke, Bd. 1, p. 9.

[21] Abel, Sur la comparaison des fonctions transcendantes. Œuvres Bd. 2, p. 55.

[22] Abel, Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendantes. Œuvres, Nouv. Édition Bd. 1, p. 145 (in der ersten Ausgabe von 1839 noch nicht aufgenommen); das Abelsche Theorem findet sich auch in den später geschriebenen, aber früher (in Bd. 3 und 4 des J. f. Math. 1828 u. 1829) veröffentlichten Arbeiten Abels: Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes. Œuvres Bd. 1, p. 444 und: Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes. Œuvres Bd. 1, p. 515.

[23] Ausführliches darüber in Königsberger, Zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transzendenten in den Jahren 1826—29. Leipzig 1879.

[24] Abel, Recherches sur les fonctions elliptiques. Œuvres Bd. 1, p. 263.

[25] Extraits de deux lettres de M. Jacobi de l'université de Königsberg à M. Schumacher. Astron. Nachr. Bd. 6 Nr. 123, Sept. 1827. Jacobis Ges. Werke, Bd. 1, p. 29.

[26] Jacobi, Demonstratio theorematis ad theoriam functionum ellipticarum spectantis. Astron. Nachr. Bd. 6, Nr. 127, Dezember 1827. Jacobis Ges. Werke Bd. 1, p. 37. Die angezogene Stelle lautet p. 43: »Notatione nova simplicioreque abhinc utar. Sit scilicet $F(\varphi) = \Xi$, tunc vulgo φ amplitudo ipsius Ξ nominatur, quamobrem φ in sequentibus per am Ξ denotabitur. Si itaque

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \Xi,$$

$x = \sin \operatorname{am} \Xi$ erit«.

[27] Schumacher teilte die hier erwähnte Stelle des Briefes von Hansteen am 6. Juni 1828 an Gauss mit (siehe Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher, herausgegeben von Peters, 1. Bd. 1860, p. 179) und fügte bei: »Wenn Sie einmal Ihre Untersuchungen bekannt machen, wird es ihm wahrscheinlich noch mehr an Schnaps kosten«.

Die Erregung Abels spricht auch aus seinem Briefe an Holmboe vom 29. Juli 1828, wo er seine am 27. Mai an die Astron. Nachrichten eingesandte Abhandlung: Solution d'un problème concernant la transformation des fonctions elliptiques (Astron. Nachr. Bd. 6, Nr. 138; Œuvres Bd. 1, p. 403) »min Dodelse af Jacobi« nennt, was im Memorial mit »exécution«, von Bjerknes mit »mortification« übersetzt wird, und wofür wir im Deutschen wohl »Abschlachtung« sagen würden. Von dieser Abhandlung sagt übrigens Jacobi in seinem Briefe an Legendre vom 9. September 1828: »Elle est au-dessus de mes éloges comme elle est au-dessus de mes propres travaux.«

[28] Über Jacobis Arbeiten und insbesondere über den Wettstreit zwischen Abel und Jacobi vgl. ausser den oben genannten Abhandlungen über Abel, der Gedächtnisrede von Dirichlet und Königsbergers Arbeit: Zur Geschichte etc. noch: Königsberger, Carl Gustav Jacob Jacobi. Festschrift zur Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages. 1904 und: Carl Gustav Jacob Jacobi. Rede zu der vom Internationalen Mathematiker-Kongress in Heidelberg veranstalteten Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages, gehalten am 9. August 1904.

[29] Vgl. dazu noch Gundelfinger, Über die Entdeckung der doppelten Periodizität und Jacobis Anteil daran. Berl. Ber. 1898, I., p. 342.

[30] Gauss, Disquisitiones arithmeticae. Werke Bd. 1, p. 412: »Ceterum principia theoriae, quam exponere aggredimur, multo latius patent, quam hic extenduntur. Namque non solum ad functiones circulares, sed pari successu ad multas alias functiones transcendentes applicari possunt e. g. ad eas, quae ab integrali

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

pendent.«

[31] Vgl. den oben genannten Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher, Bd. 2, p. 177.

[32] Vgl. ebenda die Briefe Nr. 303, 307, 308, 312, 319, 339 und 341; auch Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel, 1880, p. 476.

[33] »Cependant elles ne sont pas les seules entreprises en Allemagne sur le même objet. M. Gauss, ayant appris de celles-ci, m'a fait dire qu'il avait développé déjà en 1808 les cas de 3 sections, 5 sections et de 7 sections, et trouvé en même temps les nouvelles échelles de modules qui s'y rapportent« Jacobis Ges. Werke Bd. 1, p. 393.

[34] Vgl. Jacobis Ges. Werke, Bd. 1, p. 398, 416 und 418; der Unmut Legendres über Gauss kommt übrigens später noch einmal zum Ausdrucke; er schreibt nämlich am 15. Oktober 1828 an Jacobi (vgl. a. a. O. p. 428) bezüglich dessen einem Briefe an Crelle vom 2. April 1828 entstammenden Arbeit: Note sur les fonctions elliptiques (Ges. Werke Bd. 1, p. 251): »L'envahisseur M. G. ne s'avisera point, je pense, d'écrire qu'il avait trouvé tout cela longtemps avant vous, car s'il disait pareille chose, il se ferait moquer de lui.«

[35] Gauss' wissenschaftliches Tagebuch, 1796—1814. Mit Anmerkungen herausgegeben von Klein, Math. Ann. Bd. 57, p. 1.

[36] Eintrag des Tagebuches 32 vom 9. September 1796; dazu: Untersuchungen über die transzendenten Funktionen, die aus dem Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

ihren Ursprung haben (Werke Bd. 8, p. 93).

[37] Einträge des Tagebuches 51 vom 8. Januar 1797, 60—63 vom 19., 21. und 29. März 1797; dazu: Elegantiores integralis

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

proprietates (Werke Bd. 3, p. 404).

[38] Einträge des Tagebuches 91, 92 vom Juli 1798, dazu: De curva lemniscata (Werke Bd. 3, p. 413).

[39] Einträge des Tagebuches 98, 100—102 vom 30. Mai, November, 14. und 23. Dezember 1799; dazu: De origine, proprietatibusque generalibus numerorum mediorum arithm.-geometricorum. (Werke Bd. 3, p. 361), und: De functionibus transcendentibus, quae ex differentiatione mediorum arithmetico-geometricorum oriuntur. (Werke Bd. 3, p. 372).

[40] Einträge des Tagebuches 105—111 vom 1. Mai bis 10. Juni 1800.

Zu diesen Tagebucheinträgen vgl. noch die Anmerkungen des Herausgebers und dessen Mitteilungen aus Notizbüchern von Gauss, insbesondere die für obige Darstellung massgebende Anmerkung p. 26.

[41] Dass Abel bereits den Jacobischen Ansatz des Umkehrproblems gekannt habe, will Bjerknes dem Schlusse seines Briefes an Crelle vom 9. August 1826 und noch mehr den Worten entnehmen: »Je me réserve de développer dans une autre occasion les nombreuses applications de ce théorème, qui jetteront du jour sur la nature des fonctions transcendantes dont il s'agit« mit denen Abel seine Abhandlung: Démonstration d'une propriété générale etc. (Œuvres Bd. 1, p. 517) schliesst, und von denen Bjerknes (a. a. O. p. 216, vgl. auch p. 286) sagt: »Certainement il est difficile de comprendre quel serait le sens de ces paroles, si l'inversion, vers laquelle tendent ses investigations, n'était pas clairement devant ses yeux.«

[42] Jacobi, Suite des notices sur les fonctions elliptiques; d. d. 21. Juli 1828. Ges. Werke Bd. 1, p. 262; De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur; d. d. 14. Februar 1834, Ges. Werke Bd. 2, p. 23 (deutsch unter dem Titel: Über die vierfach periodischen Funktionen zweier Variabeln, auf die sich die Theorie der Abelschen Transzendenten stützt; herausgegeben von H. Weber, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 64). Dass Jacobi hier (Ges. Werke Bd. 2, p. 32 und 43, Ostwalds Klassiker Nr. 64, p. 11 und 25, nicht wie Weber in seinen Anmerkungen angibt, p. 4 und 14) ohne weitere Bemerkung und insbesondere ohne ausdrückliche Einschränkung auf einwertige Funktionen die Annahme dreifach periodischer Funktionen einer Veränderlichen für »absurd« erklärt, hat in der Folge zu wiederholten Beanstandungen Anlass gegeben, worüber man die eben erwähnten Weberschen Anmerkungen vergleiche.

[43] Riemann, Theorie der Abelschen Funktionen, Art. 12. Ges. math. Werke, 2. Aufl., 1892, p. 119. Prym, Neue Theorie der ultraelliptischen Funktionen. 2. Ausgabe, 1885, p. 15 u. ff.

[44] Euler, Evolutio generalior etc. Novi Comment. Petrop. Bd. 12, p. 42; vgl. dazu Cantor, Vorlesungen etc., Bd. 4, p. 805.

[45] Jacobi, Considerationes generales de transcendentibus Abelianis; d. d. 12. Juli 1832, Ges. Werke Bd. 2, p. 5.

[46] Jacobi, De functionibus duarum var. etc.; siehe auch den 1847 verfassten Aufsatz von Jacobi: Zur Geschichte der elliptischen und Abelschen Transzendenten. Ges. Werke Bd. 2, p. 516.

[47] Eisenstein, Bemerkungen zu den elliptischen und Abelschen Transzendenten. J. für Math., Bd. 27 (1844), p. 185.

[48] Vgl. dazu Königsberger, Festschrift p. 190; insbesondere aber Gundelfinger, Carl Gustav Jacob Jacobi: Zur Zentenarfeier. Frankfurter Zeitung Nr. 203 vom 23. Juli 1904.

[49] Dazwischen liegen die Arbeiten Hermites (Extraits de deux lettres de M. Charles Hermite à M. Jacobi. Hermite Œuvres Bd. 1, p. 10, 1. Brief vom Januar 1843, und: Sur la division des fonctions Abéliennes ou ultraelliptiques. Œuvres Bd. 1, p. 38), die aber gleichfalls auf die Darstellung der Funktionen nicht eingehen.

[50] Auszug mehrerer Schreiben des Dr. Rosenhain an Herrn Professor Jacobi über die hyperelliptischen Transzendenten. J. für Math., Bd. 40, 1850, p. 319.

[51] Rosenhain, Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes qui sont les inverses des intégrales ultra-elliptiques de la première classe, Mém. prés. par div. savants T. 11, p. 388; deutsch unter dem Titel: Abhandlung über die Funktionen zweier Variablen mit vier Perioden, welche die Inversen sind der ultra-elliptischen Integrale erster Klasse, herausgegeben von H. Weber, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 65.

[52] Jacobi hat die Vorlesung später, im Wintersemester 1839/40, im wesentlichen ungeändert wiederholt, und eine Borchardtsche Ausarbeitung dieser späteren Vorlesung ist, allerdings nicht vollständig, im 1. Bande der Ges. Werke Jacobis, p. 497 u. d. Titel: »Theorie der elliptischen Funktionen, aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet«, veröffentlicht worden. Den Übergang von den Thetafunktionen zum elliptischen Integral 1. Gattung siehe auch in meinem Lehrbuch der Thetafunktionen, p. 331.

[53] Göpel, Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis. J. f. Math. Bd. 35, 1847, p. 277, deutsch unter dem Titel: Entwurf einer Theorie der Abelschen Transzendenten erster Ordnung; herausg. von H. Weber, Ostwalds Klassiker der exakten Wiss., Nr. 67.

[54] Dieser Brief vom August 1844 ist sowohl in Jacobis Ges. Werken Bd. 2, p. 96, als auch in Hermites Œuvres, Bd. 1, p. 18, abgedruckt; zuerst wurde er im 32. Bande des J. f. Math. abgedruckt, nicht wie Göpel irrtümlich angibt im 33., ein Fehler, der auch in die deutsche Ausgabe der Göpelschen Abhandlung übernommen wurde.

[55] Vgl. dazu mein Lehrbuch der Thetafunktionen, p. 463.

[56] Weierstraß, Beitrag zur Theorie der Abelschen Integrale. Progr. Braunsberg 1849. Werke Bd. 1, p. 111, Zur Theorie der Abelschen Funktionen. J. f. Math., Bd. 47, d. d. 11. September 1853. Werke Bd. 1, p. 133, und Theorie der Abelschen Funktionen 1856. J. f. Math., Bd. 52. Werke Bd. 1, p. 297, siehe auch Weierstraß, Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transzendenten, bearbeitet von Hettner und Knoblauch. Werke Bd. 4, p. 9.

[57] Dieser vom 25. November 1828 datierte Brief ist in Abel's Œuvres Bd. 2, p. 271, abgedruckt.

[58] Hermite, Sur la théorie des transcendantes à différentielles algébriques. Extrait d'une lettre à M. Liouville. Œuvres Bd. 1, p. 49.

[59] Weierstraß, Werke Bd. 4, p. 9.

[60] Riemann, Theorie der Abelschen Funktionen. 1857. Ges. math. Werke 1876, p. 81; 2. Aufl. 1892, p. 88.

[61] Christoffel, Vollständige Theorie der Riemannschen ϑ-Funktion. Math. Ann. Bd. 54, 1901, p. 347.

[62] Prym, Zur Theorie der Funktionen in einer zweiblättrigen Fläche. Denkschr. d. Schweiz. Naturf. Ges. Bd. 22, 1867, p. 5.

[63] Euler, Observationes etc. Novi Comm. Petr. Bd. 6, Vorbericht p. 10: »Speculationes mathematicae, si ad earum utilitatem respicimus, ad duas classes reduci debere videntur. Ad priorem referendae sunt eae, quae cum ad vitam communem, tum ad alias artes, insigne aliquod commodum afferunt, quarum propterea pretium ex magnitudine hujus commodi statui solet. Altera autem classis eas complectitur speculationes, quae etsi cum nullo insigni commodo sunt conjunctae, tamen ita sunt comparatae, ut ad fines analyseos promovendos, viresque ingenii nostri acuendas occasionem praebeant. Cum enim plurimas investigationes, unde maxima utilitas exspectari possit, ob solum analyseos defectum deserere cogamur, non minus pretium iis speculationibus statuendum videtur, quae haud contemnenda analyseos incrementa pollicentur«.