# WAS SIND
# UND WAS SOLLEN
# DIE ZAHLEN?

MAINZER UNIVERSITÄTS-REDEN

27

Antrittsrede zur Übernahme
des Rektorats
am 24. November 1966
von
Professor Dr. phil. Hans Rohrbach

Aus Zeitgründen kamen nur etwa zwei Drittel
des Manuskripts zum Vortrag

# *Was sind und was sollen die Zahlen?*

## I

„Was sind und was sollen die Zahlen?“ So lautet der Titel einer Abhandlung von Richard Dedekind[1]) aus dem Jahre 1888. Wenn ich dem heutigen Festvortrag dasselbe Thema voranstelle, so will ich damit nicht sagen, ich könnte oder wollte der Abhandlung Dedekinds etwas Gleichwertiges an die Seite stellen. Dazu ist eine akademische Festrede nicht der richtige Ort. Meine Absicht ist lediglich, einen — notgedrungen gerafften — Überblick über einige Bemühungen von Mathematikern zu geben, das Geheimnis der Zahlen, ihr Wesen und ihre Bedeutung zu enträtseln. Von Pythagoras an bis in die Gegenwart haben diese Bemühungen nicht aufgehört. Sie wurden und werden mitgetragen von Physikern, Theologen und Philosophen. Noch immer aber stehen sich unterschiedliche Auffassungen gegenüber: Sind die Zahlen freie Schöpfungen des menschlichen Geistes und haben sie ihr Sein nur im Bewußtsein des Menschen oder kommt ihnen ein Ansichsein außerhalb des menschlichen Denkens zu? Allgemeiner gesprochen: Bringt der Mathematiker die von ihm gefundenen mathematischen Wahrheiten aus sich selbst hervor oder erforscht er nur, was immer schon da ist?
Beide Auffassungen stehen sich seit Jahrtausenden wie These und Antithese gegenüber, ohne daß es je zu einer Synthese gekommen ist. Die Auseinandersetzungen sind zuweilen so heftig geführt worden, daß es darüber zu persönlichen Feindschaften kam. Sollte das nicht zu der Gegenuntersuchung veranlassen, ob es sich bei der Frage nach dem Sein der Zahlen überhaupt um ein echtes, sinnvolles Problem handelt? Echt in *dem* Sinne, daß sich These und Antithese als wirkliche Alternativen gegenüberstehen? Sinnvoll in *der* Weise, daß das

---

1) R. *Dedekind,* Was sind und was sollen die Zahlen, Braunschweig 1888; 8. unveränd. Auflage 1960.

Problem mit wissenschaftlichen Mitteln entscheidbar ist? Wird nicht in beiden Fällen vorausgesetzt, daß den Zahlen überhaupt ein Sein zukommt, daß dieses Sein eindeutig und daß es bestimmbar ist? Kann es nicht sein, daß den Zahlen verschiedene Seinsweisen eigen sind? Daß die Frage nach ihrem Sein wissenschaftlich unentscheidbar ist?
Wie nicht anders zu erwarten, bin ich mit diesen Andeutungen aus dem eigentlichen Bereich der Mathematik herausgetreten und befinde mich im Bereich einer Philosophie der Mathematik, wenn nicht bereits im Bereich einer philosophischen Ontologie. Es steht mir aber nicht zu, anders denn als Mathematiker Stellung zu nehmen. Deshalb muß ich darum bitten, mir in den Bereich der Mathematik zu folgen, um Fragestellung und bisherige Versuche einer Lösung kennenzulernen.

## II

Ich beginne damit, daß ich die Zahlen vorstelle, mit denen der Mathematiker arbeitet. Da ist zunächst die Folge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., die aus der 1 durch Iteration, d. h. durch sukzessives Hinzufügen der 1 entsteht. Wir lernen sie in der Kindheit und ersten Schulzeit und gebrauchen sie zum Zählen. Dabei machen wir die Erfahrung, daß dieses Zählen in zweifacher Weise erfolgen kann: zur Kennzeichnung von *Anzahlen* (Zahl der Schüler einer Klasse, Zahl der Einwohner einer Stadt usw.) und zur *Numerierung* von Dingen (Hausnummern einer Straße, Seitenzahlen eines Buches, Tage eines Monats usw.). Im ersten Fall verstehen wir die natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen, im zweiten Fall als Ordinalzahlen. Indem ich diesen Satz ausspreche, berühre ich aber bereits mehrere Probleme.
Zunächst sind die natürlichen Zahlen als solche noch nicht definiert, in ihrer Seinsweise nicht erkannt. Auf sie kann ich mich nur berufen, weil der Mensch die Fähigkeit besitzt zu zählen und diese Fähigkeit durch einen Lernprozeß entfalten und steigern kann.

Weiter werden diese Zahlen durch Zeichen repräsentiert; aber es sind dieselben Zeichen, die für die Kardinal- wie für die Ordinalzahlen benutzt werden, obgleich beide Arten grundverschiedene Entstehungs- und Funktionsweisen besitzen. Die Ordinalzahl wird, wie schon gesagt, auf dem Wege der Iteration der 1 erhalten. Die Kardinalzahl dagegen wird auf dem Wege der Abstraktion als gemeinsames Merkmal aller gleichmächtigen Mengen gewonnen, d. h. je zwei Mengen, deren Elemente sich eineindeutig einander zuordnen lassen, haben dieselbe Kardinalzahl. Bei einer endlichen Menge sprechen wir dann von der *Anzahl* ihrer Elemente. Die Kardinalzahl gibt also Antwort auf die Frage: *Wieviel* Elemente gehören zu einer vorgegebenen Menge? Die Ordinalzahl dagegen erteilt Auskunft über den *Standort* eines Elements innerhalb der Menge, kennzeichnet also deren Ordnung.

Daß wir trotz unterschiedlicher Definition und Funktion der Kardinal- bzw. Ordinalzahl beiden dasselbe Zeichen zuweisen, beruht auf einer Eigenschaft gleichmächtiger geordneter endlicher Mengen, der Ähnlichkeit, d. h. darauf, daß sie sich *unter Erhaltung der Ordnung eineindeutig* aufeinander abbilden lassen. Für Kardinal- und Ordinalzahlen unendlicher Mengen trifft dies im allgemeinen nicht zu. Bei den natürlichen Zahlen ist jedoch das Zahlzeichen dasselbe, gleich ob man sie als Kardinal- oder als Ordinalzahl verstehen will. Erst die sprachliche Interpretation des Zeichens, ob man sie mit „eins, zwei, drei, . . ." oder mit „erstes, zweites, drittes, . . ." anspricht, kennzeichnet die Funktion, die man bei ihnen in Anspruch nimmt.

Schließlich ist noch ein weiteres altes Problem in diesem Zusammenhang zu nennen, das der Priorität. Ist die Rolle der Kardinalzahl oder die der Ordinalzahl das Primäre im Begriff der natürlichen Zahl? Man neigt dazu, der Ordinalzahl den Vorrang zu geben. Nach H. Weyl[2]) läßt sich zeigen, daß die Anzahl einer aus Elementen einer bestimmten Grundkategorie bestehenden Menge

[2]) *H. Weyl*, Das Kontinuum, Berlin 1932, S. 28/29.

eine Funktion dieser Menge ist und daß diese Funktion mittels der Weylschen Prinzipien, insbesondere des Iterationsprinzips konstruiert werden kann. Das bedeutet, daß sich die eine Rolle der natürlichen Zahlen, als Kardinalzahlen zur Anzahlbestimmung zu dienen, auf ihre andere, als Ordinalzahlen die Iteration in abstrakter Reinheit darzustellen, zurückführen läßt. Hieraus schließt Weyl, daß logisch die Ordinalzahlen die ursprünglichen sein müssen, fügt aber in einer Fußnote sogleich hinzu: „Ob nicht *erkenntnistheoretisch* doch der Anzahlbegriff etwas Primäres und vom Begriff der Ordinalzahl Unabhängiges ist, will ich hier nicht erörtern." Damit will Weyl geltend machen, daß jedes Zählen die Kenntnis der Zahlen bereits voraussetzt, daß also wohl die Erkenntnis der Zahl an sich das Ursprüngliche ist, und von da aus erst im Akt des Zählens die Ordinalzahlen entstehen. Wie ich meine, sieht Weyl hier richtig, daß *beide* Sachverhalte zutreffen und daß es auf den Zusammenhang ankommt, in dem man die Frage nach der Priorität der einen oder der anderen Rolle der natürlichen Zahlen stellt.

## III

Ausgehend von den natürlichen Zahlen wurde der Zahlbegriff aus praktischen Bedürfnissen nach und nach mehrfach erweitert. Um ein vorgegebenes Ganzes unterteilen zu können, wurden Brüche eingeführt, und für das Geld- und Wirtschaftswesen, für Soll und Haben brauchte man die negativen Zahlen und die Null. Hierbei erhielt auch die Null, die im Bereich der natürlichen Zahlen nur die — allerdings wichtige — Rolle eines Positionsanzeigers spielt, Kardinalzahlcharakter als Elementeanzahl der leeren Menge. Ich gehe auf die historische Entwicklung nicht ein, sondern skizziere gleich einen Aufbau des Zahlensystems, wie er heute in der Mathematik vollzogen wird.

Man bildet als ersten Schritt geordnete Paare $(a, b)$, wo $a$ und $b$ die Menge $N$ der natürlichen Zahlen durchlaufen, definiert für sie zwei Vergleichsrelationen (Gleichheit und Ordnung) sowie zwei Verknüpfungen (Addition und Multiplikation) und beweist, daß dies so geschehen kann, daß die Relationen und Verknüpfungen den von den natürlichen Zahlen her bekannten Rechenregeln genügen. Darüber hinaus leisten sie noch mehr: In ihrem Bereich ist die Subtraktion unbeschränkt ausführbar. Hinter dem Zahlenpaar $(a, b)$ verbirgt sich nichts anderes als die Differenz $a - b$.

Man scheut sich nun nicht, diese Zahlenpaare, genauer gesagt: in bestimmter Weise definierte *Klassen* solcher Paare, selbst als Zahlen anzusehen. Ob und was für eine Seinsweise etwa diesen neuen Zahlen zukommt, ist mathematisch irrelevant. Es genügt uns, *daß* wir mit ihnen rechnen können, und daß wir wissen, *wie* wir mit ihnen zu rechnen haben. Wir ordnen den neuen Zahlen neue Zahlzeichen zu und nennen ihre Gesamtheit die Menge oder den Bereich $G$ der *ganzen Zahlen*. Schließlich weisen wir noch nach, daß $G$ einen Teilbereich enthält, der sich auf die Menge $N$ der natürlichen Zahlen eineindeutig so abbilden läßt, daß dabei die Vergleichsrelationen und Verknüpfungen von $G$ einschließlich ihrer Eigenschaften in die von $N$ übergehen. Dieser Teilbereich von $G$ ist also in mathematischer Hinsicht, d. h. strukturell, der Menge $N$ der natürlichen Zahlen vollkommen gleichwertig. Wir brauchen diese in Zukunft nicht mehr und ersetzen $N$ daher durch den nachgewiesenen gleichwertigen Teilbereich von $G$, dessen Elemente nun die Bezeichnung *positive* ganze Zahlen erhalten. Außer ihnen enthält $G$ die Null und die negativen ganzen Zahlen.

Für unser Thema über das Sein der Zahlen ist wichtig zu beachten, daß wir, bei dem geschilderten Vorgehen, aus dem vorgegebenen Material der natürlichen Zahlen mit den ganzen Zahlen etwas ontologisch völlig Neues geschaffen haben. Nicht der *Bereich* der natürlichen Zahlen, sondern der *Begriff* „Zahl", der bislang durch „natürliche Zahl" repräsentiert war, wird erweitert. Ontologisch ist die natürliche Zahl 5 von der positivganzen

Zahl $+5$ wesensverschieden; mathematisch jedoch ist der Unterschied gegenstandslos.

Ein Verfahren, wie es von der Menge $N$ zur Menge $G$ geführt hat, wird nun auf $G$ angewandt. Mit den ganzen Zahlen als Ausgangsmaterial schaffen wir mittels des Prozesses der Paar- und Klassenbildung $(m, n)$ mit $m, n$ ($n$ nicht 0) aus $G$ und geeigneter Definition der Vergleichsrelationen und Verknüpfungen — die wir wieder Gleichheit und Ordnung bzw. Addition und Multiplikation nennen — einen neuen Zahlenbereich, den Bereich $R$ der rationalen Zahlen. Hinter dem Symbol $(m, n)$ verbirgt sich diesmal der Quotient $\frac{m}{n}$. Der Bereich $R$ leistet wieder mehr als der Bereich $G$ der ganzen Zahlen: In $R$ sind alle vier Grundrechnungsarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, letztere mit Ausnahme der Division durch 0) unbeschränkt ausführbar. Damit ist endlich *der* Umfang an Eigenschaften erzielt, den man mit dem Begriff „Zahl" zu verbinden pflegt.

Den neuen Zahlen werden zweckmäßige Zahlzeichen zugewiesen, nämlich $\pm \frac{m}{n}$ für die positiven bzw. negativen rationalen Zahlen (wobei $m, n$ teilerfremde natürliche Zahlen sind) und das alte Zeichen 0 für die neue Null des Zahlenbereichs $R$. Weiter wird gezeigt, daß ein Teilbereich von $R$, nämlich die Menge der Zahlen $\pm \frac{m}{1}$, mit der Menge $G$ der ganzen Zahlen (in oben ausgeführtem Sinne) mathematisch gleichwertig ist. Daher können wir jetzt auf $G$ verzichten und allein mit den Zahlen von $R$ arbeiten. Im Hinblick auf unser Thema jedoch ist wieder zu beachten, daß die natürliche Zahl 5, die ganze Zahl $+5$ und die rationale Zahl $+\frac{5}{1}$ zwar mathematisch als unterschiedslos angesehen werden, ontologisch aber paarweise wesensverschieden sind.

## IV

Mit dem Vorangehenden habe ich die Bereiche der natürlichen, der ganzen und der rationalen Zahlen skizziert. Der Aufbau des Zahlensystems ist damit jedoch nicht abgeschlossen. Ich muß

darum bitten, mir noch zwei weitere Schritte zu folgen, die vom Bereich der rationalen Zahlen zu dem der reellen und von diesem zu dem der komplexen Zahlen führen sollen. Ich stelle aber diese Erweiterungsschritte zunächst zurück und beziehe nun auch die zweite Fragestellung meines Themas ein: Was *sollen* die Zahlen? In der eingangs genannten Abhandlung gibt R. Dedekind auf die Frage: „Was sind und was sollen die Zahlen?" die Antwort: „Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes; sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen." Er fügt hinzu, daß wir erst durch das rein logisch aufgebaute Reich der Zahlen in den Stand gesetzt werden, „unsere Vorstellungen von Raum und Zeit genau zu untersuchen, indem wir dieselben auf dieses in unserem Geiste geschaffene Zahlenreich beziehen". Hier wird auf die unauflösbare Wechselbeziehung zwischen Mathematik und Naturwissenschaft, insbesondere Mathematik und Physik einschließlich Astronomie hingewiesen. Ein Mathematiker, der sich der Zahlentheorie zugewandt hat, betrachtet die Zahlen zwar unabhängig von irgendwelchen Zweckbestimmungen. Er erforscht sie um ihrer selbst willen und hat mit der Aufdeckung ihrer additiven und multiplikativen Eigenschaften vollauf zu tun. Aber er weiß auch um die Notwendigkeit des Dienstes, den die Mathematik den Naturwissenschaften zu leisten hat; er weiß ebenso um die Fruchtbarkeit der Zusammenarbeit und um die gegenseitige Anregung, auf die der Mathematiker immer wieder angewiesen ist.
Nach Dedekind liegt der Sinn der Zahlen also darin, daß sie dem Menschen die Möglichkeit geben, das Naturgeschehen in Raum und Zeit gesetzmäßig zu erfassen. Ich pflichte ihm gern darin bei und füge hinzu, daß diese Beziehung für mich nichts Selbstverständliches, sondern etwas Erstaunliches ist. Wie kommt es, so bin ich von Physikern gefragt worden, daß die Zahlen und ihre Gesetze so überraschend auf die Wirklichkeit passen? Wie kommt es, daß das Naturgeschehen mathematisch gedacht werden kann? Eine Antwort hierauf kann wohl nur als Ausdruck

einer inneren Überzeugung aufgrund einer persönlichen Entscheidung gegeben werden.

1857 schließt *K. Weierstraß* seine Antrittsrede[3]) in der Berliner Akademie der Wissenschaften mit den Worten: „Auf die Frage aber, die ich schon vernommen, ob es denn wirklich möglich sei, aus den abstrakten Theorien, welchen sich die heutige Mathematik mit Vorliebe zuzuwenden scheine, auch etwas unmittelbar Brauchbares zu gewinnen, möchte ich entgegnen, daß doch auch nur auf rein spekulativem Wege griechische Mathematiker die Eigenschaften der Kegelschnitte ergründet hatten, lange bevor irgendwer ahnte, daß sie die Bahnen seien, in welchen die Planeten wandeln, und daß ich der Hoffnung lebe, es werde noch mehr Funktionen geben mit Eigenschaften, wie sie Jacobi an seiner $\Theta$-Funktion rühmt, die lehrt, in wieviel Quadrate sich jede (natürliche) Zahl zerlegen läßt, . . . , und dennoch, setze ich hinzu, im Stande ist, und zwar sie allein, das wahre Gesetz darzustellen, nach welchem das Pendel schwingt."

Ich zitiere weiter — in gekürzter Fassung — eine Äußerung von *Max Planck*[4]): „Alle physikalischen Erkenntnisse beruhen auf Messungen. Alle Messungen haben übereinstimmend zu dem Schluß geführt, daß sämtliche physikalischen Geschehnisse auf mechanische und elektrische Vorgänge, hervorgerufen durch die Bewegungen gewisser Elementarteilchen, zurückgeführt werden können. In diesen Vorgängen treten universelle Konstanten auf, die gewissermaßen die unveränderlichen Bausteine sind." Beispiele für solche Zahlen sind etwa das Plancksche Wirkungsquantum, die Elektronenladung, die Elektronenruhmasse, die Feinstrukturkonstante, die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Planck fragt sodann: „Sind sie — diese Zahlen — Erfindungen des menschlichen Forschergeistes oder besitzen sie einen realen, von der menschlichen Intelligenz unabhängigen Sinn?" Und er stellt fest: „Die Existenz dieser Konstanten ist ein greifbarer Beweis für das

[3]) *K. Weierstraß*, Wissenschaftliche Werke I, Berlin 1894, S. 225 f.
[4]) *M. Planck*, Wege zur physikalischen Erkenntnis, 4. Auflage., Braunschweig 1944, S. 298, 299, 300.

Vorhandensein einer Realität in der Natur, die unabhängig ist von jeder menschlichen Messung."

Ferner verweise ich auf einige Sätze von *W. Heisenberg* aus einem Vortrag von 1958, in dem er auf die strukturelle Verwandtschaft antiker und heutiger Vorstellungen von der Materie eingeht[5]). Für die Pythagoreer bedeutete „Zahl" soviel wie eine geordnete Struktur, die *in* den Dingen steckt und deren eigentliches Wesen ausmacht. Diese Struktur wird bei Platon im antikatomaren Verständnis mittels der regulären Körper beschrieben, wobei diese aber nicht als substanzhaft angesehen werden, weder im Sinne des aristotelischen Substanzbegriffs noch in dem der klassischen Physik. Die Begrenzungsflächen der regulären Körper, sagt Heisenberg, „sind bei Platon nicht Materie, sie sind nur noch Form, . . . , und die Frage nach dem Warum der Elementarteilchen wird von Platon auf Mathematik zurückgeführt . . . Die letzte Wurzel der Erscheinungen ist also nicht die Materie, sondern das mathematische Gesetz, die Symmetrie, die mathematische Form . . . Durch die grundlegende Bedeutung der Symmetrieeigenschaften erhält jeder Versuch einer Theorie der Elementarteilchen . . . einen eigentümlichen Charakter von Geschlossenheit. Man findet Strukturen, die so miteinander verknüpft und verschlungen sind, daß man eigentlich an keiner Stelle mehr Änderungen vornehmen kann, ohne alle Zusammenhänge in Frage zu stellen."

Man darf wohl ohne Übertreibung sagen, daß hier der pythagoreische Grundgedanke zum Ausdruck kommt, das Wesen der Dinge sei die „Zahl": ἀριθμὸς οὐσία πάντων, die Zahl verstanden als strukturelle Harmonie, als ordnendes Prinzip.

Damit bestätigen uns Planck sowohl wie Heisenberg, daß für sie die Zahlen nicht nur ein gedankliches mathematisches Sein haben, sondern darüber hinaus ein Entsprechen in der Wirklichkeit der Natur besitzen. Zahlen sind Strukturmerkmale über

---

[5]) *W. Heisenberg*, Die Plancksche Entdeckung und die philosophischen Grundlagen der Atomlehre, Naturwissenschaften 1958, S. 227–234.

Mengen. Ihr Sinn liegt darin, daß sie die physikalischen Strukturen der Welt beschreiben lassen. Auch bei einer völlig zweckfreien Erkenntnis eines Mathematikers wird es sich immer wieder herausstellen, daß eines Tages ein Physiker mit Erstaunen danach greift, weil er in dem mathematischen Begriff das geeignete Hilfsmittel, in der mathematischen Aussage den richtigen Ausdruck für einen Naturvorgang findet, sei er gesetzmäßiger, sei er kontingenter Art.

## V

Damit kehre ich zur Mathematik der Zahlen und ihrem Aufbau zurück. Wir waren bis zum Bereich der rationalen Zahlen gekommen. Die entscheidende Frage ist nun: Reichen diese Zahlen aus, die mathematischen und physikalischen Strukturen der Welt zu erfassen? Die negative Antwort hierauf löste die erste Grundlagenkrise der Mathematik des Abendlandes aus, kaum daß diese Mathematik ihre ersten Schritte getan hatte. Denn bereits die Pythagoreer entdeckten, daß die rationalen Zahlen nicht ausreichen, um die Länge einer jeden Strecke zu messen. Die Diagonale eines Quadrates ist, in der Längeneinheit der Seiten gemessen, mit diesen inkommensurabel. So stellten sie fest, daß die Quadratwurzel aus einer natürlichen Zahl im allgemeinen nicht mehr eine rationale Zahl ist. Sie wehrten sich gegen diese Entdeckung, da für sie damit eine Weltanschauung zusammenbrach, der Glaube nämlich, daß die Strukturen dieser Welt allein mit den natürlichen Zahlen und ihren Proportionen, d. h. mit rationalen Zahlen, erfaßt werden können.
Um also beliebige Strecken in bezug auf ihre Länge messen oder um beliebige Zeigerausschläge auf einer Skala bestimmen zu können, waren neue Zahlen erforderlich. Diese wurden in den irrationalen Zahlen gefunden bzw. geschaffen, die zusammen mit den rationalen die Menge der reellen Zahlen ergeben. Hierbei darf ich bemerken, daß in diesem Zusammenhang das Wort

„ratio" nicht mit „Vernunft", sondern mit „Verhältnis" zu übersetzen ist. Die irrationalen Zahlen sind nicht unvernünftige oder sinnlose Zahlen, sondern solche, die sich nicht als Verhältnis zweier ganzen Zahlen darstellen lassen.

Der Mathematiker kennt im wesentlichen drei Arten, die irrationalen Zahlen zu definieren. Ich beschränke mich auf die von Dedekind in seiner hier zitierten Abhandlung entwickelte Methode. Danach wird die Menge der rationalen Zahlen so in zwei Klassen $A$ und $B$ zerlegt, daß alle diese Zahlen erfaßt werden, keine Klasse leer bleibt und jede Zahl von $A$ kleiner ist als jede Zahl von $B$. Man nennt $A$ die Unterklasse, $B$ die Oberklasse und die Zerlegung der Menge $R$ in die Klassen $A$ und $B$ einen *Schnitt* im Gebiet der rationalen Zahlen. Es läßt sich sofort zeigen, daß nicht zugleich $A$ ein größtes *und* $B$ ein kleinstes Element besitzen können. Wenn nun die Unterklasse $A$ ein größtes *oder* die Oberklasse $B$ ein kleinstes Element hat, so ist dieses Grenzelement eine rationale Zahl. Sie erzeugt, wie man sagt, den Schnitt. Wenn aber weder $A$ ein größtes noch $B$ ein kleinstes Element besitzt, so liegt keine rationale, den Schnitt erzeugende Zahl vor. Indem man nun verlangt, daß auch in diesem Fall der Schnitt durch eine *Zahl* erzeugt wird, schafft man eine neue Art von Zahlen. Damit diese den Namen „Zahl" zu Recht tragen, muß allerdings noch nachgewiesen werden, daß und wie man mit ihnen rechnen kann. Das kann nach ähnlichen Prinzipien wie bei den früheren Erweiterungen geschehen. Ebenso läßt sich in der Menge der „Schnittzahlen" ein Teilbereich nachweisen, der zu $R$ in dem hier schon mehrfach angesprochenen Sinne mathematisch gleichwertig ist. Damit kann man auch auf $R$, d. h. auf die rationalen Zahlen, verzichten. Die so gewonnenen neuen Zahlen heißen die *reellen Zahlen.*

Für bestimmte Zwecke der reinen Mathematik wie der Anwendungen ist eine nochmalige Erweiterung des Zahlenbegriffs erforderlich. In der hier schon mehrfach vorgeführten Weise bildet man wiederum geordnete Paare, diesmal aus reellen Zahlen, und weist für diese Paare die Zahleneigenschaften hinsichtlich der in geeigneter Weise zu definierenden Vergleichsrelationen und Verknüpfungen nach. Hierbei stellt sich heraus, daß die Ordnungsrelation nicht mehr für die neuen Zahlen selbst, sondern nur für ihre Absolutbeträge gilt, ein Zeichen dafür, daß sich ein solcher Aufbau von Zahlenbereichen nicht beliebig fortsetzen läßt. In der Tat läßt sich zeigen, daß mit der nun erreichten Menge von geordneten Paaren reeller Zahlen, die als *komplexe Zahlen* bezeichnet werden, der Aufbau des Zahlensystems in dem Sinne einen Abschluß gefunden hat, daß bei noch umfassenderen Erweiterungen des Zahlenbegriffs wesentliche Eigenschaften der Zahlen verlorengehen.

## VI

Mit dieser Skizze der sukzessiven Erweiterung des Zahlenbegriffs habe ich hier den sogenannten *genetischen Aufbau* des Zahlensystems vorgeführt. Er ruht in seinen mathematischen Grundlagen auf der Mengenlehre, da er auf den natürlichen Zahlen gründet und sowohl der Begriff der Kardinalzahl wie der des Zählens und damit auch der Begriff der Ordinalzahl den Mengenbegriff benutzt. Da man nun unter einer Menge eine Zusammenfassung von *wohlunterschiedenen* Objekten unseres Denkens oder unserer Erfahrung zu einem Ganzen zu verstehen pflegt, muß man, um Mengen zu bilden, das „Eine" von dem „Anderen" unterscheiden können, d. h. man muß zuvor z. B. wissen, was die „1" und was die „2" ist. Schon bei den Pythagoreern findet sich die Aussage, daß sich aus der Einheit und der Zweiheit alle Zahlen ableiten lassen. Von Zaratas, dem Lehrer des Pythagoras, wird berichtet, daß er die Einheit den Vater, die Zweiheit aber die Mutter der Zahlen genannt habe[6]). Nach Diogenes Laertius hat der Pythagoreer Philolaos seine Schrift „Von der Natur" beginnen lassen mit den Worten[6]): „Alle Zeu-

[6]) Vgl. *Albert von Thimus*, Die harmonikale Symbolik des Altertums, Bd. 1, Köln 1868, S. 126; ferner Aristoteles, Metaphysik I, 6: 987 b 20–988 a 17.

gung, alles Werden im Kosmos ist in harmonischer Mischung zusammengefügt aus Unbegrenztem und Begrenzendem, der ganze Kosmos sowohl wie alle Einzeldinge in ihm." Und diese Zusammenfügung fand *nach dem Vorbild der Zahl* statt. So lautete die Lehre der Pythagoreer, der Platon wie folgt Ausdruck gibt[6]): Es ist „das Weltall gemischt in seiner Zusammensetzung aus dem Begrenzenden zugleich und dem Unbegrenzten, gleichwie die Gesamtheit der Zahlen aus der Einheit und aus der Zweiheit des Teiligen und Nichtteiligen sich aneinanderreiht, worin Gleichheit und Ungleichheit, Selbstheit des Seins und Anderssein, Schranke und Unendlichkeit, Begrenztes und Unbegrenztes in die Erscheinung treten".

Auch für E. Husserl[7]) sind die Zahlen Eins und Zwei nur aufweisbar, nicht aber konstruktiv definierbar; Aufgabe einer Philosophie der Arithmetik sei es, diesen in der Anschauung möglichen Aufweis wirklich zu vollziehen. Und Gerhard Stammler[8]), der den Sachverhalt mathematisch und philosophisch untersucht, formuliert in guter Pointierung: „Man muß — zu einer mengentheoretischen Begründung der natürlichen Zahlen — *vor* dem Studium der Mengenlehre (mindestens) bis zwei zählen können, um *nach* ihrem Studium beliebig weit zählen zu können" (wobei mit „Zählen" gemeint ist, eine klare Einsicht in den Begriff der jeweils angesprochenen Zahl zu haben). Dies zeigt, daß auch abgesehen von den bekannten Paradoxien der klassischen Mengenlehre diese allein nicht ausreicht, um auf ihr die natürlichen Zahlen begrifflich zu begründen. Solange Begriffe wie Zuordnung, Abbildung, Äquivalenz benutzt werden, wird immer schon die Unterscheidung des „Einen" von dem „Anderen", d. h. der Begriff der natürlichen Zahl, implizit vorausgesetzt.

Die Erkenntnis, daß die klassische Mengenlehre mit ihren Annahmen über die Ausführbarkeit gewisser Prozesse der

---

[7]) E. *Husserl*, Philosophie der Arithmetik, Bd. 1, Halle 1891, S. 212 ff.
[8]) G. *Stammler*, Der Zahlbegriff seit Gauß, Halle 1926, S. 113/14.

Mengenbildung die Grundlagen der Arithmetik nicht zu sichern vermag, führte die Mathematiker dazu, immer neue Versuche für eine solche Sicherung zu unternehmen. Aus diesen haben sich im Laufe der letzten Jahrzehnte zwei Hauptrichtungen herauskristallisiert: die *axiomatische* und die *konstruktive Methode*. Es muß jedoch betont werden, daß im Zuge dieser Entwicklung das inhaltliche Anliegen einer Begründung der Arithmetik und damit der Mathematik als ganzer sich gewandelt hat. Es geht nicht mehr — wie zur Zeit der Antike, des Mittelalters und der Neuzeit — um eine Klärung des Seins der Zahlen, sondern um eine widerspruchsfreie Begründung der für sie erforderlichen mathematischen Begriffe, Operationen und Schlußweisen. Diese Akzentverschiebung beruht im Grunde darauf, daß die Frage nach dem Sein der Zahlen nicht mathematisch formulierbar und daher auch nicht mathematisch entscheidbar ist. Hierauf werde ich später noch einmal zurückkommen.

Der Mathematiker von heute weiß, daß er in seinem Gegenstand nichts real Seiendes vor sich hat. Mathematische Erkenntnis betrifft das Seiende nur insofern, als sie die Begreifbarkeit des Seins von Seiendem erkennbar macht[9]). Weniger philosophisch ausgedrückt: Als Mathematiker denken wir Dinge unabhängig davon, ob ihnen eine Existenz in einem philosophischen Sinne zukommt; wir setzen Operationen und Relationen und untersuchen die daraus sich ergebenden Strukturen; wir entwerfen Modelle, um den Strukturen mathematische Existenz im Sinne von Widerspruchsfreiheit zu sichern. Zeigt es sich dann, daß ein solches Modell auf physikalische Erscheinungen „paßt" — als *ein* Beispiel aus der Gegenwart nenne ich den Begriff des Hilbertraumes —, so nimmt es der Physiker gern auf, um eine tiefere und adäquatere Einsicht in Naturvorgänge zu gewinnen. Aber auch der Physiker weiß, daß er nur ein *Modell* der Wirklichkeit — des Seienden —, nicht die Wirklichkeit selbst in der Hand hat.

---

[9]) Vgl. hierzu F. O. *Sauer*, Mathematisches Denken auf dem Wege zur Philosophie, München 1965, Kap. VIII.

Ich komme zurück auf die beiden eben genannten Wege zur Begründung der Mathematik, die axiomatische und die konstruktive Methode, und möchte ihre Bedeutung und ihre Unterschiede am Beispiel der Zahlen aufzeigen. Die axiomatische Methode will einen bestimmten Bereich mathematischer Erkenntnis zu einem System von Aussagen gliedern, die sich aus wenigen, an den Anfang gestellten *unbewiesenen Grundannahmen* in logisch einwandfreier Weise deduktiv ableiten lassen. Die unbewiesenen Grundannahmen, die man als *Axiome* bezeichnet, sind zu einem gewissen Grade willkürlich. Ihre Auswahl regelt sich nach Gesichtspunkten der Evidenz, der Widerspruchsfreiheit, der Zweckmäßigkeit und der Ökonomie. In die Grundannahmen gehen gewisse nicht definierte *Grundbegriffe* ein; alle weiteren Begriffe innerhalb des Systems aber werden durch Zurückgehen auf diese Grundbegriffe definiert. So entsteht eine in sich wahre Struktur von Aussagen und Begriffen, die ihre Brauchbarkeit darin erweist, daß sie alle jeweils gewonnene einschlägige Erkenntnis mit möglichst wenigen unbewiesenen Grundannahmen, dem Axiomensystem einschließlich der Grundbegriffe, widerspruchsfrei in sich einordnen läßt.

Für die Struktur des Bereiches der natürlichen Zahlen ist das *Axiomensystem von Dedekind-Peano* am bekanntesten. Es lautet:

1. Eins ist eine natürliche Zahl; ihr wird das Zeichen 1 zugeordnet.
2. Zu jeder natürlichen Zahl $n$ gibt es einen Nachfolger $n'$, der wieder eine natürliche Zahl und von $n$ verschieden ist.
3. 1 ist nicht Nachfolger.
4. Die Nachfolger $m'$ bzw. $n'$ zu verschiedenen natürlichen Zahlen $m, n$ sind ebenfalls verschieden.
5. Eine Menge von natürlichen Zahlen, die 1 und mit $n$ stets auch $n'$ enthält, umfaßt *alle* natürlichen Zahlen.

In diese Axiome gehen, da Gleichheit als logische Identität zu verstehen ist, nur die Begriffe „natürliche Zahl", „Eins" und „Nachfolger" als Grundbegriffe ein. Es bleibt also offen, was eine natürliche Zahl, insbesondere die „Eins" und ihr Nachfolger Eins', d. h. das „Andere", die Zwei, ist. Ferner wird deutlich, daß bei einem Axiom *die Grundbegriffe das Primäre,* die Quelle des Axioms, sind und dieses selbst nur als Feststellung einer Beziehung zwischen den Begriffen anzusehen ist.

Was leistet dieses Axiomensystem, was leistet es nicht? Axiom 1 sichert die Existenz wenigstens *einer* natürlichen Zahl, der Eins, Axiom 2 die Existenz unendlich vieler natürlicher Zahlen, nämlich der mittels der Nachfolgereigenschaft beliebig weit erzeugbaren Zahlen. Axiom 3 schließt aus, daß die 1 sich in der Folge dieser Zahlen wiederholt. Axiom 4 verhindert, daß sich die von 1 verschiedenen Zahlen wiederholen, sichert also, daß keine periodische Folge entsteht. Axiom 5 schließlich gewährleistet, daß bei Iteration aus der 1 wirklich alle natürlichen Zahlen erfaßt werden, daß es also außer den mit dieser Methode erhaltenen keine weiteren mehr gibt. Außerdem lassen sich mittels der Axiome die Begriffe Ordnung, Summe und Produkt definieren, ferner alle ihre Eigenschaften ableiten. Damit läßt sich der ganze genetische Aufbau des Zahlensystems bis zu den komplexen Zahlen ohne Zuhilfenahme weiterer Axiome durchführen.

Dagegen werden durch das Axiomensystem weder die natürlichen Zahlen definiert noch gar ihre Seinsweise bestimmt — der Begriff natürliche Zahl gehört ja zu den Grundbegriffen. Ebenso werden keine anderen Zeichen als die 1 und die Nachfolger $1'$, $1''$, . . . festgelegt. Ob wir die Zahlen mit den sogenannten arabischen oder mit römischen Ziffern, mit türkischen oder Sanskritziffern, mit Buchstaben oder mit Hieroglyphen bezeichnen, ist gleichgültig und unterliegt der Konvention. Die uns heute geläufigen Ziffern haben sich, zugleich mit dem dezimalen Positionssystem, lediglich aus Gründen der leichteren Handhabung eingebürgert.

Ein Axiomensystem ist nicht eindeutig bestimmt. Außer dem von Dedekind-Peano gibt es für die natürlichen Zahlen z. B. auch das von Erhard Schmidt und S. Kaczmarz, das neben der natürlichen Zahl die Begriffe „Ordnung" (Kleinerrelation) und „Vorgänger" als Grundbegriffe enthält. Bei Dedekind-Peano steht für die Folge der natürlichen Zahlen das *Iterationsprinzip* im Vordergrund, die unbeschränkte Erzeugbarkeit aller natürlichen Zahlen aus der 1, gesichert durch Axiom 5, das Axiom der vollständigen Induktion. Bei Erh. Schmidt-Kaczmarz dagegen wird als charakteristisches Merkmal die *Wohlordnung* der natürlichen Zahlen angesehen. Natürlich sind beide Axiomensysteme äquivalent, d. h. jedes von ihnen folgt aus dem anderen, ist mittels des anderen beweisbar[10]). Das Axiomensystem von Erh. Schmidt-Kaczmarz leistet daher dasselbe wie das von Dedekind-Peano, insbesondere den genetischen Aufbau des gesamten Zahlensystems[11]).

## VIII

Die axiomatische Methode, die ich am Beispiel der natürlichen Zahlen exemplifiziert habe, läßt sich selbstverständlich auch auf andere Gebiete der Mathematik anwenden. Das ist z. B. für die Mengenlehre durch Zermelo, Fraenkel u. a. geschehen. Ihre Absicht war, die natürlichen Zahlen mittels einer *widerspruchsfreien* Mengenlehre zu begründen. Ferner hat man den Bereich der reellen Zahlen direkt axiomatisch gekennzeichnet, ohne für ihn auf den genetischen Aufbau des Zahlensystems zurückzugreifen. Darauf gehe ich aber nicht weiter ein, sondern wende mich jetzt der *konstruktiven Methode* zu. Um ihr Ziel aufzuzeigen, erinnere ich an das Wesen der axiomatischen Methode: Aussagen aus vorangestellten Grundannahmen logisch einwandfrei zu deduzieren.

Die konstruktive Methode verdankt ihre Entstehung der *Kritik* an der axiomatischen Methode. Th. Skolem konnte zeigen, daß

10) Vgl. *H. Rohrbach*, Das Axiomensystem von Erhard Schmidt, Math. Nachr. 4 (1950/51), 315—321.

11) Vgl. *G. Feigl-H. Rohrbach*, Einführung in die höhere Mathematik, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1953, Kap. 9—11.

kein Axiomensystem der Arithmetik *kategorisch* ist, d. h. genau für die natürlichen Zahlen gilt. Vielmehr trifft jedes arithmetische Axiomensystem noch für andere mathematische Objekte zu. Ferner gelang K. Gödel der Nachweis, daß es in jeder axiomatisch aufgebauten mathematischen Theorie Sätze gibt, die mit den Mitteln, die die Theorie zur Verfügung stellt, prinzipiell unentscheidbar, d. h. weder beweisbar noch widerlegbar sind. Und zu solchen innerhalb der Theorie unentscheidbaren Sätzen gehört insbesondere die Aussage, die Theorie sei widerspruchsfrei! H. Weyl hat diesen Sachverhalt intuitiv schon vorher erkannt, wenn er sagt[12]), die Überzeugung, daß alle wahren Urteile aus den Axiomen mittels logischer Schlüsse herleitbar sind, sei ein wissenschaftlicher *Glaube*. Anderenfalls wäre die Mathematik, prinzipiell gesprochen, trivialisiert.

So konzentrierte sich die Kritik an der axiomatischen Methode auf ihr Programm der „logisch einwandfreien Deduktion", d. h. auf die Logik. Man fragte: *Was heißt „logisch einwandfrei"?* Um hier zu einer Antwort zu kommen, verzichtete man als erstes auf jede inhaltliche Bedeutung der Grundbegriffe und Axiome. Während ursprünglich der Sinn der Grundbegriffe und die Richtigkeit der Axiome als intuitiv gewiß galten, kommt es nun zu rein deduktiven Theorien, in denen die undefinierten Begriffe nichts mehr bedeuten und die abgeleiteten Aussagen inhaltlose Formeln sind. Der nächste Schritt ist der Verzicht auf die naiv zu nennende klassische Logik zur Ableitung der Formeln. Damit hat man eine „Formalisierung" erreicht, bei der Aussagen nicht mehr nach naiv-logisch evidenten, sondern nach willkürlichen Regeln abgeleitet werden, die jedoch explizit festgelegt und konsequent befolgt werden müssen — wie Spielregeln bei einem Brettspiel. So kommt man zu einem recht willkürlichen Kalkül, bei dem „Figuren" ohne Bedeutung aus bestimmten, in endlicher Anzahl vorliegenden Grundfiguren, den „Atomen", nach bestimmten Regeln zusammengesetzt werden. Die wirkliche, kon-

[12]) *H. Weyl*, a. a. O [2]), S. 11.

struktive Herstellbarkeit der zusammengesetzten Figuren ist das Entscheidende.

Dieses willkürliche Spielregelprinzip wird nun zu einem Kalkül, zum Beweis mathematischer Aussagen ausgebaut. Man legt „Grundformeln" und „Kalkülregeln" geeignet fest, bildet mittels der logischen Partikel wie „nicht", „und", „oder", ... sowie Relationszeichen wie „plus", „mal", „gleich", ... und Variablen $X, X', \ldots$ Aussagen und nennt eine solche Aussage logisch-wahr, wenn sie aus endlich vielen Grundformeln nach endlich vielen Kalkülregeln hergestellt werden kann. Bei diesem Verfahren wird also die Beweisbarkeit von Sätzen anhand ihrer *formalen Herleitbarkeit* festgestellt.

Der nächste entscheidende Schritt der konstruktiven Methode besteht nun darin, zwischen Objektsprache und Metasprache zu unterscheiden. Die Objektsprache ist das Objekt der Metasprache. Zum Beispiel ist in einer Grammatik des Lateinischen für deutsche Schüler das Latein die Objekt-, das Deutsche die Metasprache; denn in dem Grammatikbuch wird in deutscher Sprache über das Lateinische geredet. So hat man auch bei einem mathematischen Beweis beide Sprachen zu unterscheiden: Die Sprache, in der die zu beweisende Behauptung ausgesprochen wird, von der Sprache der logischen Schlüsse, mit denen diese Behauptung auf ihr Zutreffen oder Nichtzutreffen untersucht wird. Hierbei kann es geschehen, daß die Metasprache selbst wieder Objekt einer darüberstehenden Sprache, einer Metametasprache, wird. Jedenfalls hebt sich erst durch eine Formalisierung des Beweisganges die Metasprache von der Objektsprache ab und kann dann nach den Regeln des Kalküls auf ihre Schlüssigkeit überprüft werden.

Damit zeichnet sich die Möglichkeit ab, eine axiomatisch aufgebaute mathematische Theorie mit den Mitteln der konstruktiven Mathematik als widerspruchsfrei nachzuweisen. Genau das ist die Aufgabe der konstruktiven Methode; diese Aufgabe ist sinnvoll, weil die formal-logische Ableitbarkeit eines Widerspruchs aus einem Axiomensystem innerhalb der konstruktiven

Mathematik definierbar ist. So hat sowohl die axiomatische wie die konstruktive Methode ihren legalen Platz im Bereich der Mathematik[13]).

## IX

Ich fasse zusammen! Am Anfang der abendländischen Bemühungen um die Zahl steht *Pythagoras* und seine Schule. Sie wagen die allgemeine These: Nur ein zahlenmäßig Bestimmtes ist ein Seiendes. Für sie ist die Zahl das Wesen und der Anfang aller Dinge: ἀριθμὸς οὐσία και ἀρχὴ πάντων. Insbesondere hatten die ersten zehn natürlichen Zahlen für sie eine ausgezeichnete Bedeutung, wohl weil mit ihnen (wir würden sagen: positionsmäßig) alle anderen (natürlichen) Zahlen dargestellt werden können. Der Pythagoreer *Philolaos* singt das Lob dieser Zahlen in überschwenglicher Weise mit den Worten[14]): „Man muß die Werke und das Wesen der Zahl nach der Kraft beurteilen, die in der Zehnzahl liegt. Denn sie ist groß, allvollendend, allwirkend und göttlichen und himmlischen sowie menschlichen Lebens Anfang und Führerin."

Nach *Platon* gehören die Zahlen — es sind in der Antike stets die natürlichen Zahlen gemeint — zu den Ideen, und es ist möglich, daß auch er wie die Pythagoreer nur die ersten zehn Zahlen als Ideen bezeichnet hat[15]). Der fundamentale Unterschied zwischen beiden Auffassungen liegt aber, wie schon *Aristoteles* festgestellt hat[16]), darin, daß die Pythagoreer das Ansichsein der Zahlen *in* der Welt sehen, während Platon die Zahlen als Ideen *aus* der Welt heraussetzt. Bei Platon begegnet uns bereits die Frage nach dem theologischen Verständnis der Zahl: Das Sein der Zahl ist ein reines Sein, das mit dem Sein Gottes auf das innigste zusammenhängt, und die Erkenntnis der Zahl führt daher zu Gott hin[17]).

---

[13]) Vgl. *P. Lorenzen*, Metamathematik, Mannheim 1962, *Einleitung* und § 5.
[14]) *Philolaos*, B. 11. *Diels-Kranz*, Die Fragmente der Vorsokratiker, Bd. 1, 6. Aufl., Berlin 1951, S. 411.
[15]) Vgl. *G. Martin*, Klassische Ontologie der Zahl, Köln 1956, S. 22 ff.
[16]) *Aristoteles*, Metaphysik I, 6: 987 b 28.

Bei *Augustin* wird dieser theologische Ansatz Platons zu Ende gedacht. In der Interpretation des mundus intelligibilis werden die Ideen und damit auch die Zahlen endgültig zu Gedanken Gottes[18]). Von hier aus ist für ihn ein formaler Gottesbeweis möglich: Das Sein des mundus intelligibilis und in ihm vor allem das Sein der Zahlen ist ein so erhabenes Sein, daß das Sein Gottes dafür eine notwendige Voraussetzung ist[18]). Auch für *Thomas von Aquin* hat die Zahl als Idee ihr Sein ausdrücklich und ausschließlich im Denken Gottes.

Selbst der Zweifler *Descartes* meint[19]): „Omne quid verum est esse aliquid" und betont wiederholt, daß daher die Gegenstände der Mathematik und die von ihnen geltenden Wahrheiten — insbesondere also die Zahlen mit ihren Eigenschaften — eine Realität besitzen, die über die Realität der res extensa und der res cogitans hinausgeht. Ihnen komme eine realitas objectiva zu.

Die Universalität von *Leibniz* ist es, die in Zusammenfassung der Bemühungen von Antike und Mittelalter die Seinsbestimmung der Zahl nach wissenschaftstheoretischen, mathematischen und philosophischen Gesichtspunkten vollzieht. Hierbei geht es Leibniz im wesentlichen um vier Problemkreise: Einmal um die Frage der Widerspruchsfreiheit, wo er der These zuneigt, daß das Merkmal der Widerspruchsfreiheit das der logischen Existenz und damit das der mathematischen Existenz beinhaltet. Zum anderen um die Aussage, daß die Zahlen nicht real, sondern ideal sind, wobei man beachten muß, daß für Leibniz im wesentlichen nur die Monaden Realität besitzen und Zahlen als Relationen zwischen Monaden verstanden werden. Zum dritten geht es Leibniz um eine Begründung der Zahlen aus dem Denken Gottes. In ihm gründen alle Zahlen, die die möglichen Welten bestimmen und dadurch selbst möglich sind und die in der einen

---

17) *Platon,* Theaetet 176 B; Epinomis 988 B.

18) *Augustinus,* De diversis quaestionibus LXXXIII, q. 46, n. 2. ML 40, 30. Vgl. auch *J. Ritter,* Mundus intelligibilis, Frankfurt 1937, Kap. 3 u. 4.

19) *R. Descartes,* 5. Meditation, Wissenschaftl. Werke VII, S. 65. Vgl. dazu Wissenschaftl. Werke V, S. 160.

durch Gottes Schöpfung wirklich gewordenen Welt wirklich geworden sind. Zum vierten um die Anwendbarkeit der Zahlen und ihrer Gesetze in der Natur und damit in der Physik[20]). Dieser letzte Problemkreis ist es, der sich mit dem *Sinn* der Zahlen befaßt. Für *Kant* gibt es die Zahl nur vom Standpunkt des Menschen, d. h. von der Vernunft aus[21]).
Eine weitergehende Differenzierung in der Auffassung des Zahlbegriffs zeigt sich, als im 19. Jahrhundert der genetische Aufbau des Zahlensystems vorliegt. Hier vertritt *L. Kronecker* den Standpunkt, daß die natürlichen Zahlen von Gott geschaffen, alle anderen dagegen Menschenwerk sind. Für ihn ist der logische Vorrang der natürlichen Zahlen auch ein seinsmäßiger Vorrang. Für *K. Weierstraß* zieht die logische Abhängigkeit, die infolge des genetischen Aufbaus zwischen den verschiedenen Arten von Zahlen besteht, keine Seinsabhängigkeit oder Seinsverschiedenheit nach sich. Damit setzt er sich über einen alten Satz der Ontologie hinweg, daß ein *A* einem *B* seinsmäßig vorausgeht, wenn *A* ohne *B* sein kann, aber nicht *B* ohne *A*. *Dedekind* geht noch einen Schritt weiter und erklärt *alle* Zahlen als Schöpfungen des menschlichen Geistes. Für ihn ist das Zählen nichts anderes als der sukzessive Übergang von einem schon erschaffenen Individuum zu dem darauf folgenden neu zu erschaffenden[22]). Dieselben Unterschiede zeigen sich auch noch in diesem Jahrhundert: *H. Weyl*[23]) betont mit Kronecker die fundamentale Einzigkeit der natürlichen Zahlen. *P. Natorp*[24]) versteht mit Kant und Dedekind die Zahl vom Menschen her und begründet die Arithmetik auf der Logik. *E. Husserl*[25]) schließt sich Weierstraß an. Es ist wohl erst *H. Hasse*[26]), der explizit diesen gordischen Knoten durchhaut, indem er feststellt: „Nach Kronecker hat sie — die natürlichen Zahlen — Gott geschaffen, nach Dedekind der

[20]) Vgl. hierzu *G. Martin*, a. a. O. [15]), S. 85 ff.
[21]) *G. Martin*, a. a. O. [15]), S. 99.
[22]) *R. Dedekind*, Wissenschaftliche Werke III, 317; a. a. O.[1]), 17.
[23]) *H. Weyl*, a. a. O. [2]).
[24]) *P. Natorp*, Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften, 2. Aufl., Leipzig 1921, S. 279.
[25]) *E. Husserl*, Logische Untersuchungen, Bd. 1, 4. Aufl., Halle 1928, S. 251 f.

menschliche Geist. Das ist je nach Weltanschauung ein unlösbarer Widerspruch oder ein und dasselbe." Damit will Hasse sagen, daß für die Zahlentheorie die Frage nach dem Wie und Woher der Zahlen gleichgültig ist. Es genügt, daß sie da sind und in ihren Relationen und Eigenschaften bekannt sind.

Eine philosophische oder theologische Begründung der Seinsweise der (natürlichen) Zahlen geht über das mathematisch Mögliche hinaus, und es liegt auch, wie bereits betont, keine mathematische Notwendigkeit für eine solche Begründung vor. Wenn eine gewünscht wird, so bevorzuge ich persönlich die theologische im Sinne von Augustin und Thomas von Aquin. Doch ist dabei zweierlei zu beachten: Einmal setzt sie den Glauben an den personalen, lebendigen Gott voraus. Zum anderen darf es darüber nicht zu anthropomorphen Mißdeutungen kommen[27]), die der Ehrfurcht vor der Heiligkeit Gottes ermangeln.

## X

Wie ich bereits bemerkte, haben sich der Ansatz der Fragestellung und damit auch die Unterschiede in den Auffassungen im 20. Jahrhundert auf die *logische* Begründung der Zahlen verlagert. Hier standen sich viele Jahrzehnte die axiomatische und die konstruktive Methode in manchmal harten Auseinandersetzungen gegenüber. Allmählich beginnt man einzusehen, daß der Streit überflüssig ist. Die Mathematik hat Raum für eine axiomatische *und* für eine konstruktive Arithmetik. Sie stehen sachlich nicht im Widerspruch zueinander, und die Metamathematik hat, wie ich kurz andeutete, viel zur Klärung des gegenseitigen Verhältnisses beider Richtungen beigetragen.

Über alledem bleibt die Frage nach dem Sein der Zahlen vom heutigen Mathematiker unbeantwortet, weil sie keine Frage aus dem Bereich der Mathematik ist und ebensowenig eine Frage

---

[26]) *H. Hasse*, Vorlesungen über Zahlentheorie, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1950, S. 1.
[27]) Vgl. etwa *G. Martin*, a. a. O. [15]), S. 59 und S. 99/100.

der Metamathematik. Aber auch, wenn jemand bei der Suche nach einer philosophischen Antwort *über* den Bereich von Mathematik und Metamathematik hinauszugehen bereit ist, sollte er sich durch das gewandelte, auf einer Selbstkritik von Mathematik und theoretischer Physik beruhende neue Denken führen lassen. Vermutlich wird er dabei keine eindeutige Kennzeichnung für das Wesen der Zahl finden, wie man sie bislang gesucht hat. Wer erkennt, daß die Zahl, als Strukturmerkmal über Mengen verstanden, das ordnende Prinzip im Innersten der Materie zu erfassen imstande ist, wird die Zahl nicht mehr nur statisch, sondern zugleich dynamisch verstehen.

Ich bin überzeugt, daß ihr *zwei komplementäre Aspekte* zuzuweisen sind. *Sie ist einmal ein Zeichen, mit dem man nach bestimmten Regeln rechnen darf, und sie ist zum anderen ein Mittel, eine Methode zur Erschließung von Strukturen. Und sie erweist sich als das eine oder das andere je nach dem Zusammenhang, in dem man ihr begegnet.*

In ähnlicher Weise wäre auch die Frage nach dem Tun des Mathematikers zu beantworten. Es geht auch hier nicht um eine Alternative, nämlich daß er entweder nur die von ihm gefundenen Wahrheiten aus sich selbst heraus hervorbringt oder nur das erforscht, was immer schon da ist. Setzt man — was für das Bestehen der beiden Möglichkeiten offenbar erforderlich ist — voraus, daß eine Wirklichkeit um uns real existiert, so muß die Antwort dahin gegeben werden, daß sowohl das eine wie das andere gilt. Der Mathematiker bringt zunächst die (relative) Wahrheit der von ihm gefundenen Strukturen aus sich heraus hervor, stellt dann aber bei der Begegnung mit der Wirklichkeit fest, daß bzw. wie weit diese Strukturen als Modell für die Wirklichkeit zutreffen. Insofern erkennt er, daß er nur erforscht hat, was schon vorher da war. Der tiefste Grund hierfür liegt natürlich darin verborgen, daß er selbst — als Mensch — den Strukturen der Wirklichkeit angehört und somit sein Denken eben dadurch bestimmt und geprägt ist.