Greifswalder Universitätsreden
9

# Wert und Wesen der Mathematik.

Festrede
bei dem
feierlichen Akte des Rektoratswechsels
an der
Universität Greifswald
gehalten von dem Rektor des Jahres 1923/1924

**Dr. Theodor Vahlen**
ord. öff. Professor der Mathematik

**am 15. Mai 1923.**



1923
Verlag Ratsbuchhandlung L. Bamberg
Greifswald.

**Gesamteinnahme für die Ruhrspende.**

## Hochansehnliche Versammlung!
## Werte Kollegen, liebe Kommilitonen!

Vom Wandel der Zeiten unberührt blieben alte akademische Sitten. Zu diesen gehört, daß der neu erwählte Rektor sich mit Beginn seines Amtsjahres durch eine Rede in den durch Freunde und Gäste erweiterten Kreis der Universität einführt, durch eine Rede, deren Stoff er naturgemäß der von ihm vertretenen Wissenschaft entnimmt. So alt diese Sitte, so alt die Klagen des Mathematikers, wenn ihm mit der hohen Ehre auch diese nicht beneidenswerte Aufgabe zufällt. Er soll über seine Gedankenwelt reden, er darf aber nicht die Sprache gebrauchen, in der mathematische Gedanken allein ihren strengen Ausdruck finden. Er soll seine Hörer für einen Stoff erwärmen, dem sie, wie er weiß, meist kühl, mindestens in achtungsvoller Ferne, oft auch feindlich gegenüberstehen. Eine freundliche Stellungnahme zur Mathematik ist so selten, daß, begegnen wir ihr, sie uns geradezu als besondere Merkwürdigkeit anmutet. Hören wir, daß Novalis [1]) die Mathematiker als die einzig Glücklichen preist, so meinen wir lächelnd: nun, ein romantischer Schwärmer. Und doch finden wir bei den Mathematikern selbst, die doch allgemein für eine von romantischer Schwärmerei besonders weit entfernte, im Gegenteil recht nüchterne Menschenklasse gelten, Worte derselben Begeisterung für die Mathematik. So vergleicht ein Alter die Mathematiker den Lotophagen: wer einmal von der Süßigkeit mathematischer Ideen gekostet, kann nicht mehr davon ablassen [2]). Gauss schreibt an W. Bolyai:

„Merkwürdig ist es immer, daß alle diejenigen, die diese Wissenschaft ernstlich studieren, eine Art Leidenschaft dafür fassen“ [3]). Und von Schellbach wird berichtet: „Mathematiker waren ihm die idealst gerichteten und glücklichsten Menschen“ [4]).

Bei dem überschwänglichen Ausruf von Novalis: „Das Leben der Götter ist Mathematik“ [5]) denkt der Mathematiker an die Worte von Plato [6]) und von Gauss [7]): ὁ θεὸς γεωμετρεῖ und ὁ θεός ἀριθμητίζει oder an das durch Leibniz [8]), gelegentlich der Entdeckung seiner berühmten Reihe für den Kreisinhalt, aufgenommene Wort Vergils [9]): „numero deus impari gaudet“; Worte, in denen sich das „Bewußtsein ausspricht, daß das Reich des Mathematischen mit seinem ganzen unendlich mannigfaltigen Inhalte nicht menschliches Machwerk ist, sondern ebenso als Gottes Schöpfung uns objektiv entgegentritt, wie die äußere Natur“ (Kummer) [10]).

Mit dieser hohen Meinung der Mathematiker von ihrer Wissenschaft steht in auffallendem Gegensatz das geringe Verständnis, dem sie in ziemlich weiten Kreisen der Nicht-Mathematiker immer noch begegnet.

Zwar sind viele Worte und Ausdrücke aus den mathematischen Wissenschaften in die tägliche Umgangssprache übergegangen, meist unbewußt, oft falsch verstanden. Z. B. rechnen vorsichtige Leute bei allem, was sie tun, mit „Sicherheitskoëffizienten“, hüten sich vor „Reibungen“, bemühen sich, nicht aus dem „Gleichgewicht“ zu geraten. Mancher klagt über das „Beharrungsvermögen“ — seiner Vordermänner oder über das „Trägheitsgesetz“ in den Amtsstuben, was „zwangsläufig“ dazu führe, daß er sein Verhältnis zur Behörde einer „Belastungsprobe“ aussetzen müsse.

Aber solche und ähnliche „Mathemacismen“ beweisen nichts gegen die Tatsache, daß die Mathematik eine höchst unpopuläre Wissenschaft ist.

Bekannt und auch heute noch oft genannt ist unter „den Gebildeten ihrer Verächter“ Schopenhauer. Er bezeichnet, sehr im Gegensatz zu Novalis, als die niedrigste aller Geistestätigkeiten die arithmetische [11]), denn — sie kann auch durch Maschinen ausgeführt werden. Er denkt also nur an das gemeine Rechnen, das doch bloß ein untergeordnetes Werkzeug ist; von der eigentlichen Arithmetik, ihrem Reichtum, ihren Schönheiten und Schwierigkeiten ahnt er nichts [12]). Wie hätte er wohl die logische Geistestätigkeit eingeschätzt, wenn er noch die Erfindung jener Begriffsmaschinen von Stanley-Jevons [13]) erlebt hätte, mit denen man auch die logischen Schlußformen, also gewissermaßen das Denken mechanisch ausführen kann? Als ebenso völligen Außenseiter zeigt sich Schopenhauer in seinen Urteilen über die Beweise der Euklidischen Geometrie, die er als „stelzbeinig und hinterlistig" bezeichnet und mit „Taschenspielerstreichen" vergleicht [14]). „Oft schließt", sagt er, „ein apagogischer Beweis alle Türen, eine nach der andern, zu und läßt nur die eine offen, in die man nun bloß deswegen hinein muß". Der Beweis des Pythagoras ist ihm ein „Mausefallenbeweis" [15]). Er vermißt an diesen Beweisen den Seinsgrund, sie lieferten nur den Erkenntnisgrund. Ähnlich forderte schon Aristoteles [16]): „Der wahre Beweis muß nicht nur, d a ß etwas ist, sondern w a r u m es ist, aufdecken" und Descartes' Worte: „Galilée explique fort bien, q u o d ita fit, mais non pas c u r ita fit" üben dieselbe Kritik an mathematischer Beweisführung. Aber nur eine rein negative Kritik; keiner hat uns je einen solchen Seinsgrund oder wenigstens den Weg zu ihm oder auch nur die Existenz eines solchen nachgewiesen [17]). Die Mathematiker arbeiten zwar dauernd an einer „Veredelung" ihrer Beweise, die hauptsächlich in einer Aufsuchung neuer einfacherer Zusammenhänge und dadurch in einer Verringerung der Anzahl erforderlicher Schlüsse besteht [18]). So sind für den Pythagoras selbst an 100 Beweise gegeben worden. Gauss hat für den Fundamentalsatz der Algebra 4 [19]), für das Reziprozitätsgesetz 7 sehr verschiedene Beweise gegeben [20]), und äußert hierbei: „Verschiedenheit der Beweise dient immer dazu, mehr Licht über eine Wahrheit zu verbreiten.“ Demnach scheint ein einzelner Beweis eines Satzes den Erkenntnistrieb des Mathematikers noch nicht voll zu befriedigen.

Aber welcher der vielen, oft hunderten von Schlüssen, aus denen sich ein Beweis aufbaut, soll nun der Seinsgrund sein? Und in welchem der oft auf völlig anderen Grundlagen aufgebauten Beweise soll der Seinsgrund stecken? Einstweilen bescheiden wir Mathematiker uns trotz Schopenhauer mit der Aufsuchung von Erkenntnisgründen.

In seiner Abneigung gegen die Mathematiker macht es Schopenhauer sichtliches Vergnügen, auf abfällige Äußerungen anderer über die Mathematiker zu verweisen, wobei er leider nicht ganz ehrlich zu Werke geht. So zitiert er Lichtenberg mit einer solchen Bemerkung, aber daß derselbe auch gesagt hat, „die Mathematik ist eine gar herrliche Wissenschaft“ [21]), unterschlägt Schopenhauer. In einer von Schopenhauer dringend empfohlenen Arbeit des Philosophen Hamilton [22]) kommt der Mystiker Poiret mit folgender Auslassung zu Worte: „der mathematische Genius erfülle seine Anhänger mit den bösartigsten Neigungen; er infiziert sie mit Fatalismus, religiöser Gleichgültigkeit, Unglauben, Roheit und einem nahezu unheilbaren Hochmut.“

Noch Schlimmeres mußten wir harmlosen Wahrheitssucher über uns ergehen lassen in der finsteren Zeit, in der unsere so klare, aber vielen so geheimnisvolle Wissenschaft mit der Astrologie und der Alchemie auf eine Stufe gestellt wurde. Aus der Zeit stammen Worte wie „Pereant mathematici“ und „mathematicus non est collega“ [23]). Nun, diese Proben werden genügen, um zu zeigen, wie die Urteile über Mathematik und Mathematiker die ganze Stufenleiter durchlaufen „vom Himmel, durch die Welt, zur Hölle“; Urteile, die zeigen, daß die Mathematik in weitesten Kreisen bis in die Reihen der Romantiker und Mystiker hinein nicht verständnisvolles Interesse, sondern nur Sensation erregt, so daß der Mathematiker jede sich bietende Gelegenheit benutzen muß, um bei den Nicht-Mathematikern mehr gerechte Würdigung und mehr Verständnis für W e r t u n d W e s e n seiner Wissenschaft zu verbreiten.

Was den Wert der Mathematik betrifft, so herrscht darüber fast nur eine Stimme, wenigstens, wenn man darunter die nutzbringende Verwertbarkeit versteht. Schon der praktische Römer schrieb in sein Gesetzbuch „Artem geometriae discere atque exercere publice interest". Er dachte dabei wohl in erster Linie an Feldmeßkunst, Baukunst, Kriegskunst, Schiffahrt. Seitdem ist das Anwendungsgebiet der Mathematik namentlich in den physikalischen und technischen Wissenschaften unermeßlich gewachsen. Das ist so unbestritten und die Bedeutung der Mathematik auf diesen Gebieten so anerkannt, daß man hierüber kein Wort mehr zu verlieren braucht. Bemerkenswerter ist es, zu sehen, wie die Mathematik „ihrem Königreich immer neue Provinzen hinzufügt" (v. Auwers) [24]. Jak. Bernoullis stolzes Wort: „omnes disciplinae mathesi indigent, mathesis nulla" [25]) erfüllt sich immer mehr, auch wo man es zunächst für ganz unmöglich gehalten hatte. So sagt noch J. St. Mill [26]): „Man wird danach begreifen, wie chimärisch die Hoffnung sein würde, daß mathematische Prinzipien jemals mit Vorteil auf Naturerscheinungen anwendbar sein werden, welche, wie die der Chemie, noch mehr der Physiologie, von der gegenseitigen Aktion unzähliger kleiner Körperteilchen abhängig sind." Heute hat längst in der Chemie die Mathematik ihren festen Platz als unentbehrliche Hilfswissenschaft erobert und bei der Erforschung der lebenden Organismen gewinnt sie neben anderen Methoden doch auch immer mehr an Bedeutung und Wirksamkeit [27]). Und was noch Auguste Comte für höchst unwahrscheinlich hielt [28]), eine Verwendbarkeit der Mathematik in den Sozialwissenschaften, ist auch bereits zur Wirklichkeit geworden [29]). Nicht nur ist die Versicherungs-Mathematik eine hochmathematische Disziplin von großer praktischer Bedeutung, sondern selbst in der Soziologie, gewissermaßen der Biologie des staatlichen Organismus, sind bemerkenswerte Anfänge vorhanden, diese Wissenschaft von einer politischen zu einer exakten zu erheben. Wir können hoffen, daß es auf diesem Wege gelingt, den Widersinn des Marxismus endgültig als das zu entlarven, was er ist: als ein Märchen für politische Kinder.

In die Psychologie haben schon Herbart [30]) und, verknüpft mit dem Experiment, Fechner [31]) die Mathematik eingeführt. Doch ist es gut, sich hier vor Augen zu halten, daß man mit allem Messen und Wägen und Rechnen, so wichtig es ist für die Erforschung der Wirkungs*gesetze*, doch dem eigentlichen *Wesen* des Wirksamen nicht näher kommt. Der Seinsgrund bleibt gerade hier unerschlossen.

Der Mathematiker, so sehr er mit Gauss seine Wissenschaft für die Königin der Wissenschaften [32]) hält, so sehr er von ihrer majestätischen Macht durchdrungen, von der Hoheit ihres Ranges überzeugt ist, erkennt doch heute genauer die Grenzen, die — zwar nicht ihr selbst — aber ihrer Anwendbarkeit gezogen sind. Das Wort Galileis: „Das große Buch der Natur ist in einer mathematischen Sprache geschrieben" [33]), lassen wir höchstens für die quantitative [34]) Seite des Naturgeschehens gelten; die Ansicht Descartes: daß schließlich die ganze Naturwissenschaft mathematisiert wird, halten wir demnach für allzu utopisch. Den Ausspruch Kants: „In der Naturlehre sei nur soviel eigentliche Wissenschaft, als Mathematik in ihr angewandt wird" [35]), lehnen wir ab, da in der Naturforschung neben der mathematischen Deduktion doch der Beobachtung und dem Experiment eine noch größere Bedeutung zugestanden werden muß. Von dem Wert und der Art des Zusammenwirkens von Mathematik und Empirie geben Spottiswoods [36]) Worte eine gute Vorstellung: „Es ist der mathematische Geist, der einen lebendigen Odem einhaucht, dem, was sonst für immer ein dürres Gerippe von Tatsachen bliebe, der die zerstreuten Glieder sammelt und zu einem neuen lebendigen Organismus aufbaut.“

Folgen wir der Mathematik weiter auf dem Wege vom Konkreten zum Abstrakten, so erblicken wir unsere trotz sechs Jahrtausenden ewig junge Wissenschaft im Bunde mit der zweitältesten Wissenschaft, der Philosophie. Schon Plato, der, wie später Leibniz und Descartes, eine Art Personalunion dieser beiden großen Königreiche darstellt, forderte: *μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω*[37]): Kein Unmathematischer komme. Die Mathematik bietet der Philosophie „ein vorzügliches Beispiel eines besonderen Erkenntnisverfahrens“ (Hölder)[38]), sie ist „die vollendetste Vereinigung zwischen exaktem Wissen und theoretischem Denken“ (Curtius)[39]) und leistet ihr außerdem mittelbaren Dienst „als eine Leitung der Seele zum Wesen hin und ein Bildungsmittel philosophischer Gesinnung“, um mit Platos Worten zu reden[40]).

Fern lag es dagegen Plato, wie es später Spinoza in seiner „Ethica more geometrica tractata“ vortäuscht, zu meinen, man könne der Philosophie mit der äußeren Form der Mathematik auch deren innere Strenge erteilen.

Den Bildungswert der Mathematik sehen wir besonders in der Gewöhnung an unbeirrt selbständiges und unvoreingenommen logisches Denken, an scharfe Begriffsbestimmung und klare Ausdrucksweise; eine gründliche Ausbildung in dieser Richtung böte zugleich den besten Schutz gegen jene Halbbildung, die sich heute in so verhängnisvoller Weise breit macht.

Der Wert der Mathematik für die Ausbildung des menschlichen Geistes wird wohl ziemlich allgemein zugegeben. Nur darüber gehen die Meinungen auseinander, wie viel Raum man den mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern gegenüber den philologisch-historischen im

Schulunterrichte zuteilen soll. Die möglichste Entwicklung jedes individuellen Verstandes nach seiner Eigenart muß als das Ideal gelten, denn dadurch erreicht man für die geistige Höhe des Volksganzen die höchste und harmonischste Steigerung. Die Praxis muß sehen, wie sie sich diesem Ideal annähert. Nicht übersehen sollte man, daß der Bildungswert keiner Wissenschaft, auch der Mathematik nicht, auf den Verstand allein beschränkt ist. Die Mathematik stärkt und weckt den Wirklichkeitssinn und stählt, recht betrieben, auch den Willen und kann dadurch helfen, Tatmenschen heranzuziehen, wie wir sie in Gegenwart und Zukunft so dringend brauchen. Einen Aufsatz, eine lateinische Übersetzung bringt schließlich schlecht und recht jeder Schüler irgendwie zustande. Die Lösung einer wirklichen mathematischen Aufgabe erfordert vor allem den zähen Willen, im angestrengten Nachdenken nicht zu erlahmen, bis die Lösung gefunden ist. An der den Willen stählenden Eigenschaft der Mathematik mag es liegen, daß große Tatmenschen oft besonders ausgeprägte Neigungen zur Mathematik haben. Man kann hier z. B. erinnern an Prinz Eugen von Savoyen [41]), an Napoleon I. [42]), seinen Kriegsminister Carnot, seinen Marineminister Monge. Diese Minister, zugleich wirklich bedeutende Mathematiker, legen die von Pringsheim [43]) geäußerte Vermutung nahe: manch guter Mathematiker würde auch einen guten Minister abgeben; eine Hypothese, die durch unsere Erfahrungen jedenfalls bisher nicht widerlegt ist. Eine ähnlich gute Meinung von der vielseitigen Verwendbarkeit der Mathematiker äußert übrigens schon Plato [44]) in der *Πολιτεία* und z. B. auch Joh. Bernoulli in einem Briefe an Euler [45]). (Vgl. auch Luther [46]) und Melanchthon) [47]).

Über die Charakter bildende Kraft der Mathematik ist wenig bekannt, da die Mathematiker sich selten über den Werdegang ihrer Arbeiten aussprechen. Von Gauss wird berichtet [48]), er „war gestählt mit einer unschütterlichen

Willenskraft, die vor der Durchführung scheinbar unüberwindlicher Arbeiten nicht zurückschrak". „Gauss war ein Mann von eisernem Charakter, der auch nur kräftige Charaktere hochachten konnte. Sein eigentlicher . . . Lebensplan bestand in dem beharrlichen Streben, die exakten Wissenschaften . . . einem neuen Aufschwung, einer neuen Vollendung entgegenzuführen. . . Dieser wurde mit unbeschreiblicher Energie verfolgt. . . Er wurde von einer Willens- und Arbeitskraft beseelt, wie sie einem Sterblichen nur selten in ähnlicher Weise beschieden sein dürfte; er konnte daher wahrhaft herkulische Arbeiten in verhältnismäßig kurzer Zeit bewältigen." Und Jacobi schreibt [49]): „Es ist eine saure Arbeit, die ich getan habe und in der ich begriffen bin. Nicht Fleiß und Gedächtnis sind es, die hier zum Ziele führen, sie sind hier nur die untergeordneten Diener des sich bewegenden reinen Gedankens. Aber hartnäckiges, hirnzersprengendes Nachdenken erheischt mehr Kraft als der ausdauerndste Fleiß. Saure Arbeit habe ich zu bestehen, und die Angst des Nachdenkens hat oft mächtig an meiner Gesundheit gerüttelt."

Diese Worte lassen den zähen Willen erkennen, mit dem der Mathematiker den widerstrebenden Stoff niederzuringen suchen muß, aber auch den Kraftaufwand, den wirkliche, d. h. produktive Gedankenarbeit erfordert. Hierauf in heutiger Zeit hinzuweisen, ist vielleicht nicht ganz überflüssig.

Langsam reifen die Früchte der Mathematiker. Über die Bestimmung eines Wurzelzeichens schreibt Gauss [50]) an Olbers: „Seit 4 Jahren ist selten eine Woche hingegangen, wo ich nicht einen oder den andern vergeblichen Versuch, diesen Knoten zu lösen, gemacht hätte, aber alles Brüten, alles Suchen ist umsonst gewesen. Endlich ist's gelungen —."

An großen Problemen arbeiten Generationen. So ist das Waring-Problem erst 139jährigen Bemühungen der

Mathematiker erlegen [51]), während das Fermat-Problem seit 253 Jahren noch immer aller Anstrengungen spottet [52]). Und die Bewältigung der großen Probleme, die uns die Alten hinterließen [53]), namentlich des der Kreisquadratur, hat zwei Jahrtausende gedauert.

Angesichts der gewaltigen Leistungen der Mathematik hat die Frage, wie vollbringt sie das alles, zu allen Zeiten Neugierde, manchmal auch Neid erregt. Man hätte es ihr gern gleich getan. Nun, unsere Methode ist scheinbar sehr einfach, es ist das Ziehen von Schlüssen aus Prämissen. Die Schwierigkeit liegt „nur" in der richtigen Auswahl und Zusammenstellung der Prämissen, die so erfolgen muß, daß der gesuchte oder vorausgeahnte Erfolg schließlich eintritt, schließlich, d. h. am Ende einer oft sehr langen Schlußkette oder vielmehr eines sehr ausgedehnten, weit verzweigten Schlußgewebes. Da jeder gewonnene Schluß wieder zur Prämisse wird, ist der Vorrat an Prämissen unerschöpflich. Deshalb gelingt die Auffindung der richtigen Verknüpfungen oft erst nach vielen Versuchen. So klagt Gauss [54]), als er zu einem Gegenstand zurückkehrt, der ihn fast 12 Jahre geplagt hat: „Man kann hier nicht im voraus sagen: dies will ich tun, sondern hier führt vielleicht nach 999 mißlungenen Versuchen eine glückliche 1000ste Kombination zum Ziele."

Werfen uns manche Philosophen vor, wir schüfen nichts neues, alles sei schon in unseren Axiomen enthalten, so antworten wir mit einem alten Gleichnis: Gewiß, aber so, wie in dem Letterkasten des Buchdruckers alle Weisheit der Welt enthalten ist, man muß die Buchstaben bloß richtig zusammensetzen (Helmholtz) [55]).

Ist man sich über die Methode der Mathematik im klaren, so ist auch die Frage, was ist Objekt mathematischer Forschung, leicht dahin beantwortet: Alles, worauf die mathematische Methode mit unbestrittenem Erfolg anwendbar ist. Dadurch ist es auch sofort verständlich, daß das Anwendungsgebiet der Mathematik nicht abgeschlossen, sondern in ständigem Wachsen begriffen ist.

So unschätzbar und unentbehrlich die Mathematik ist, sei es für die praktischen Wissenschaften, wie Technik, Ballistik, Nautik usw., sei es für die theoretischen Wissenschaften der Erforschung der belebten und unbelebten Natur, so ist ihre Bedeutung damit keineswegs erschöpft. Sie ist nicht bloße, wenn auch noch so wichtige Hilfswissenschaft, sondern eine von aller Anwendbarkeit unabhängige selbständige Wissenschaft. Deren Objekte sind die einfachsten und deshalb überall mitspielenden Vorstellungen des Menschengeistes: Zahl und Raum. Diese boten sich der mathematischen Forschung seit den ältesten Zeiten dar, an ihnen als den einfachsten entwickelte sich geradezu die mathematische Methode. Hier nun, an der unversieglichen Quelle aller Mathematik, hier scheiden sich die Geister. „Fort mit allem, was nicht nützlich verwertbar ist“ [56]), tönt es aus den Reihen der Praktiker, oft auch der Schulmänner; und dieser ablehnende Standpunkt macht sich bemerkbar in den Lehrplänen und Prüfungsordnungen. Und vom äußersten rechten Flügel schallt es zurück: „Utilarismus ist der Todfeind wahrer Wissenschaft“ (Fricke) [57]). Wir stimmen in dieser Hinsicht Ricci [58]) zu, wenn er sagt: „die Wichtigkeit einer Eroberung des Intellekts darf nicht nach dem armseligen Maßstabe des materiellen Nutzens gemessen werden“, aber folgen ihm nicht, wenn er fortfährt: „sondern nach der überwundenen Schwierigkeit“. Hier liefert uns vielmehr Helmholtz [59]) den richtigen Gesichtspunkt: „Die Fachgenossen und das Publikum urteilen über ein . . . Werk nach dem Nutzen . . ., den es ihnen gebracht hat. Der Autor ist meist geneigt, seine Wertschätzung nach der Mühe anzusetzen, die es ihm gemacht hat.“

Aber nicht nur subjektiv ist der Maßstab nach der Schwierigkeit, er ist auch zeitlich bedingt. Gauss [60]) hebt hervor, „daß gewichtige Lehrsätze in einfach ausgeprägtem

Inhalt meist erst auf beschwerlichen Wegen begründet werden, während die einfacheren Methoden lange verborgen bleiben". Solche Vereinfachungen gelten oft als höchst unwahrscheinlich: Als Eulers Auflösung eines Fundamentalproblems, das ihn viele Jahre beschäftigt hatte, an Einfachheit weit überboten wurde durch eine neue Auflösung von Lagrange, rief er voll Bewunderung aus [61]): „Penitus obstupui, cum hoc mihi nuntiaretur."

Aber selbst, wo eine solche Vereinfachung nicht, d. h. noch nicht erreicht ist, kann die bloße Schwierigkeit die Wertschätzung nicht ausreichend begründen. In bezug auf das Fermat-Problem, das man doch gewiß vorläufig als schwierig betrachten muß, meint z. B. Gauss: „Ich gestehe, daß das Fermatsche Theorem als isolierter Satz für mich wenig Interesse hat" [62]).

Was nun die Nützlichkeit mathematischer Methoden oder Resultate angeht, so muß man unterscheiden, ob es sich um Anwendungen in den forschenden Wissenschaften handelt, ob also die Mathematik hilft, das Reich unserer Erkenntnis zu mehren, oder ob sie dazu dient, die technischen Wissenschaften zu fördern, was darauf hinausläuft, unser Leben und damit unsere Schaffensmöglichkeiten in irgendeiner Hinsicht zu heben; so z. B. durch Entwicklung der zeitsparenden Verkehrsmittel oder durch Vervollkommnung unserer Kriegsmittel, deren erfolgreicher Einsatz in der Stärkung der politischen Macht, also des wirtschaftlichen Wohlstandes und damit der kulturfördernden Kräfte seinen Lohn findet. Hier entscheiden zu müssen, was ist das wichtigste, was ist das wertvollste, bleibt uns erspart, da alle drei Gebiete Mathematik, Naturforschung, Technik in ständiger, einander befruchtender Wechselwirkung stehen. Die Technik stellt ihre Anforderungen, die zugleich Anregungen sind, an die Naturwissenschaften, beide stellen die ihrigen an die Mathematik. Trotzdem darf man sich nicht „vermessen, der weiterschreitenden

Forschung ihren Weg vorschreiben zu wollen, und jede Richtung zu verwerfen, die nicht sofort zu praktisch verwertbaren Resultaten zu führen scheint" (Weierstrass) [63]. Und „ihre höchste Blüte kann die Mathematik nur in dem ihr eigenen Elemente des abstrakten reinen Quantums entfalten, wo sie unabhängig von der äußeren Wirklichkeit der Natur nur sich selbst zum Zwecke hat" (Kummer) [64]. Auch Arago [65]) verwirft die Frage, mit der die Welt oft den Forscher entmutige: „Wozu ist das gut? Das Leben des Menschen ist nicht bloß animalisch, vielmehr gehört die Entwicklung seines Verstandes und die Erforschung der Natur zu den schönsten Aufgaben seiner Bestimmung."

Die Verwertbarkeit mathematischer Ergebnisse ist außerdem niemals vorauszusehen. Als Menächmus 4 Jahrhunderte vor Christi Geburt die Schnittkurven eines Kegels untersuchte, ließ er sich nicht träumen, daß etwa 2 Jahrtausende später die Bahnen der Planeten und ihrer Monde (auch die der Geschosse) durch diese Kurven ihre Erklärung finden würden, und daß noch einige Jahrhunderte später die nunmehr genauer bekannte Mondbewegung das für die Sicherheit der Schiffahrt so bedeutungsvolle Problem der Längenbestimmung zur See lösen würde. Von den imaginären Zahlen schrieb noch Leibniz, sie seien eine elegante und wunderbare Zuflucht des göttlichen Geistes, eine Mißgeburt der Ideenwelt, fast ein Amphibium, ein Zwitterwesen zwischen Sein und Nichtsein [66]). Heute haben sie nicht nur volles Bürgerrecht bis hinab zur Schulmathematik erworben, sondern sie bilden auch für verschiedene physikalische Theorien ein wertvolles Hilfsmittel. — Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, hervorgegangen aus der Theorie der Glücksspiele, ist die Grundlage für das so ausgedehnte und wichtige Versicherungswesen geworden, während die ältesten Versicherungsgesellschaften mangels einer solchen mathematischen Grundlage sich als nicht lebensfähig erwiesen. — Welch mächtiges Instrument in der Hand des Naturforschers und Technikers heute die Infinitesimalrechnung ist, das hat zur Zeit ihrer Erfindung wohl niemand geahnt. — Ein neueres Beispiel bieten die orthogonalen Transformationen und die Riemannschen Räume, deren Theorien längst im wesentlichen fertig waren, ehe sie in neuester Zeit die Grundlage der Relativitätstheorie, der Nicht-Newtonschen Mechanik wurden. — Die Mathematik arbeitet eben gewissermaßen auf Vorrat, sicher daß, nach einem Worte Kleins [67]), „alles, was mathematisch gesund ist, früher oder später über sein engeres Gebiet hinaus Bedeutung erlangt".

Da hätte man also eine Art Wert-Maßstab, wenn man nur immer wüßte, was mathematisch gesund ist. Gerade darüber aber werden die Meinungen immer auseinandergehen. Und überhaupt muß man mit Weierstrass „anerkennen, daß man den Zweck einer Wissenschaft nicht außerhalb derselben suchen darf" [68]). Und daß nach Gauss [69]) „alle Messungen der Welt nicht ein Theorem aufwiegen, wodurch die Wissenschaft der ewigen Wahrheiten wahrhaft weiter gebracht wird". Die Schöpfungen des mathematischen Geistes tragen eben ihren Wert und ihre Daseinsberechtigung in sich. Daß die Mathematik von der Außenwelt unabhängig rein innerlich geistig neue Erkenntnisse zeitigt, das ist es, was ihr eigentliches Wesen gegenüber allen anderen Wissenschaften ausmacht, die alle immer wieder aus der Außenwelt schöpfen müssen. Diese olympische Erhabenheit über die Welt bringt Jacobi [70]) zum Ausdruck, indem er das auch von Gauss verehrte Schillersche Gedicht von Archimedes und dem Jüngling so umdichtet:

„Zu Archimedes kam ein wißbegieriger Jüngling,
weihe mich, sprach er zu ihm, ein die göttliche Kunst,
die so herrliche Dienste der Sternenkunde geleistet,
hinter dem Uranos noch einen Planeten entdeckt.
Göttlich nennst du die Kunst, sie ist's, versetzte der
Weise,

aber sie war es, bevor noch sie den Kosmos erforscht,
ehe sie herrliche Dienste der Sternenkunde geleistet,
hinter dem Uranos noch einen Planeten entdeckt.
Was du im Kosmos erblickst, ist nur der Göttlichen Abglanz,
in der Olympier Schar thronet die ewige Zahl."

Wenn nun Schiller [71]) unserer Schwesterwissenschaft, der Astronomie, und damit auch uns mahnend zuruft:

„Euer Gegenstand ist der Erhabenste freilich im Raume,
Aber, Freunde, im Raum wohnt das Erhabene nicht",

so können wir ihm getrost entgegnen:

„Dein Erhabenes zwar bewegt auch unser Gemüte,
Unser Erhabenes ist, was vom Verstand wird erforscht."

Kann man nun aus dem Wesen dieser erhabensten Mathematik, deren Ergebnisse sich jedenfalls zunächst aller Anwendbarkeit entziehen und sich ihr vielleicht nie darbieten, zu Werturteilen kommen? Die reine Mathematik ist in der Art ihrer Tätigkeit einer Kunst vergleichbar, Kunst, nicht im bloßen Sinne von etwas, was gekonnt sein will, wie etwa, um mathematische Anwendungsgebiete zu nennen, in Baukunst, Feldmeßkunst, Kriegskunst, Markscheidekunst, Steuermannskunst, sondern in dem hohen und eigentlichen Sinne des Wortes als schöpferische Kunst im Reich des Schönen.

Die Verwandtschaft der Mathematik mit der Kunst ist oft betont worden. Der alte Ausdruck Wißkunst deutet darauf hin, Maupertuis [72]) behandelt sie in seiner akademischen Antrittsrede, Pringsheim [73]) spricht von der Mathematik als der Verstandes-Ästhetik, oft wird die Mathematik die Kunst des Verstandes genannt [74]). Sylvester [75]) sagt: „Die Mathematik ist die Musik des Verstandes und die Musik ist die Mathematik der Sinne. Der Musiker fühlt Mathematik, der Mathematiker denkt Musik." Ähnlich meinte schon Leibniz: „Die Musik ist ein verborgenes Rechnen des Geistes, der nicht weiß, daß er zählt.“ Mit der Musik vergleichen auch Helmholtz [76]) und Boltzmann [77]) die Mathematik. Daß sie aber neben ihrem Wesen als Kunst doch auch Erkenntnisfördernde Wissenschaft ist, faßte Kronecker in seiner These zusammen [78]): „Mathesis et ars et scientia dicenda.“ Wenn nach Cantor [79]) das „Wesen der Mathematik in ihrer Freiheit“ besteht, so ist damit gerade die schöpferische, aber keineswegs gesetzlose Freiheit gemeint, die auch der Kunst zukommt.

„Was die großen Meister der Renaissance, wie Brunellesco, Leonardo da Vinci, Raffael, Michelangelo und namentlich auch Albrecht Dürer, mit unwiderstehlicher Macht zu den mathematischen Wissenschaften hinzog, war“, sagt Rudio [80]), „das Bewußtsein, daß bei aller Freiheit individueller Phantasie auch die Kunst ein Gesetz der Notwendigkeit kennt, und umgekehrt bei aller Strenge des logischen Aufbaues auch die Mathematik dem Gesetz der Schönheit folgt.“

Wenn auch Analogien zwischen der Mathematik und den Künsten des sinnlich Wahrnehmbaren, besonders der Musik, bestehen, so hat sie doch die nächste Verwandtschaft mit der Kunst im rein Geistigen, der Dichtkunst. Diese Ansicht kommt sogar bei Laien zum Ausdruck. So erklärt Chamberlain [81]) Euklids Elemente für ein so vollkommenes Kunstwerk wie Homers Ilias. Kroneckers [82]) Distichon hebt mit der Verwandtschaft zugleich den Unterschied zwischen Mathematik und Poesie hervor:

„Wir Mathematiker auch sind echte, berufene Dichter:
Uns liegt noch der Beweis für das Gedichtete ob.“

Die Kunst ist das Reich des Schönen; dieser Satz gilt wie in der Kunst so in der Mathematik, hier wie dort nicht unbestritten. Zwar meint Minkowski [83]):

„Rien n'est beau, que le vrai“, was doch heißen soll:
„Alles ist schön, wenn es nur wahr ist.“

Aber die Worte von Gauss [84]), „er nehme besonders da ein lebhaftes Interesse, wo er sinnreiche Ideenverbindungen und Eleganz der Resultate erwarten darf“ und [85]) „die schönsten Lehrsätze der Arithmetik werden durch Induktion leicht entdeckt, aber ihre Beweise liegen äußerst versteckt und sind nur durch sehr tief eindringende Untersuchungen aufzuspüren. Gerade dies gibt der Arithmetik jenen zauberischen Reiz“, ebenso die Worte von Eisenstein: „mir ging die Idee des mathematisch Schönen auf“ [86]) lassen erkennen, daß nicht alles als schön empfunden wird, daß vielmehr die Schönheit zum Wertmaßstab und zur Richtschnur des Forschens wird. In diesem Sinne äußert z. B. Emil Müller [87]): „Einige wunderbare Gesetzmäßigkeiten mußten von den für geistige Schönheiten empfänglichen Griechen als eine tief geheimnisvolle Harmonie gefühlt werden, die in den Dingen verborgen liege. Vielleicht entsprang gerade diesem Gefühl der Antrieb zu den erstaunlichen Leistungen eines Euklid, Archimedes, Apollonius.“

Auch Kepler [88]) berichtet, daß er durch rein künstlerische Forderungen zu seinen unsterblichen Theorien gelangt ist, durch Suchen nach Harmonie und Einfachheit. Gerade die durch Schönheit und Einfachheit ausgezeichneten Gesetze in den mathematischen Wissenschaften treten uns mit der Objektivität und Überzeugungskraft von Naturgesetzen entgegen, während uns Kompliziertheit immer als ein „peinlicher Erdenrest“ menschlicher Unvollkommenheit erscheint. Hier gilt, was Kummer [89]) sagt: „In dem Reiche des Mathematischen herrscht eine eigentümliche Schönheit, welche . . . mit der Schönheit der Natur übereinstimmt und welche auf den sinnigen Menschen, der das Verständnis dafür gewonnen hat, ganz in ähnlicher Weise einwirkt, wie diese.“

Die heuristische Bedeutung der von Kepler geforderten Einfachheit kommt schon in dem alten Worte „simplex veri sigillum“ zum Ausdruck. Einer der größten lebenden Mathematiker, Hilbert [90]), tritt für die Einfachheit ein und zeigt an einem Beispiel, daß sie mit der Strenge durchaus vereinbar ist. Der Astronom Schumacher [91]) bewundert an Gauss besonders die unerreichbare Kunst und Einfachheit. Kirchhoff [92]) stellte geradezu als Forderung auf, die Naturvorgänge auf die einfachste Weise zu beschreiben, und Mie [93]) erklärte, daß wir uns für dasjenige System zu entscheiden haben, in dem die Naturgesetze die schönste und klarste Form haben.

Wenn ich Schönheit und Einfachheit als Wertmaß und Richtschnur aus den Aussprüchen berühmter Forscher begründe, so muß ich noch auf ein Gleichnis Newtons [94]) verweisen, das zugleich die Demut des wahrhaft großen Forschers erkennen läßt. Newton vergleicht das Reich der Wahrheit dem unermeßlichen Ozean, an dessen Gestade uns nur vergönnt ist, nach schönen Muscheln und hübschen Steinen zu suchen.

Zur Ausübung jeder Kunst gehört auch das Handwerksmäßige, und was in der Mathematik das Handwerk ist, das ist uns allen aus der Schulmathematik geläufig.

Man kann die neueren Reformbestrebungen betreffs des mathematischen Schulunterrichts kurz dahin formulieren: „Noch mehr von diesem Handwerk; noch mehr von diesen Aufgaben, die kunstlos nach eingepaukten Regeln mit Tabellen und Formelsammlungen bearbeitet werden.“

Das Handwerk ist es auch, was Schopenhauer zu seinem schiefen Urteil über die Mathematik bringt; er sieht eben n u r das Handwerk, etwa, wie wenn er den Bildhauer für einen Steinmetzen hielte.

Das mathematische Handwerk hat natürlich, namentlich durch die Anforderungen der Praxis, eine außerordentliche Ausdehnung und Verfeinerung erfahren. Stäckel [95]) nennt die Dezimalzahlen und das Einmaleins Hammer und Zange, während er die scharfsinnigen Methoden, mit denen heute die höhere Analysis Probleme von nie geahnten Schwierigkeiten bezwingt, mit den gewaltigen Werkzeug-maschinen moderner Technik vergleicht, die die stärksten Eisenplatten durchbohren, zerschneiden, verbiegen. Sartorius von Waltershausen[96]) spricht von den ungeheuren Gewichten, welche Gauss mit seinem geistigen Hebelwerke in Bewegung setzen konnte.

Die Praktiker sind leicht geneigt, die Mathematik nur nach ihrer handwerksmäßigen Leistungsfähigkeit zu bewerten, aber doch ganz anders als Schopenhauer, nämlich höchst anerkennend, da sie wissen, was ihnen die Mathematik leistet. So verglich sie Liebig[97]) einem Federmesser, während die Marquise du Châtelet[98]) in einem Briefe an Friedrich den Großen die Mathematik den Schlüssel zu allen Pforten nennt, und Arago[99]) in ihr ein Instrument erblickt, das proteusartig immer neue Formen annehme.

Ist Schönheit Richtschnur des Forschens in der reinen Mathematik, so ist der Forscher, da es kein unstrittiges Merkmal des Schönen gibt, auf seinen subjektiven Takt und Geschmack verwiesen. „Es gibt einen mathematischen Takt oder Geschmack", sagt Eisenstein[100]), „der . . . die Betrachtungen und Entwicklungen . . . leitet". Ähnlich Hankel[101]): „Es ist so zu sagen, ein wissenschaftlicher Takt, welcher die Mathematiker bei ihren Untersuchungen leiten . . . muß, . . . ein Takt, welcher dem ästhetischen nahe verwandt, das einzige ist, was in unserer Wissenschaft nicht gelehrt und nicht gelernt werden kann, aber eine unentbehrliche Mitgift eines Mathematikers sein sollte." Und Engel, der die Bedeutung des Geschmacks in der Mathematik besonders untersucht, äußert[102]): „Man geht bei der Behandlung der Mathematik nach ästhetischen Gesichtspunkten zu Werke und läßt sich dabei von Grundsätzen des Geschmacks leiten."

Soll der Geschmack den Mathematiker führen, so ist das gelegentliche Auftreten von Geschmacksverirrungen eine naturgemäße Begleiterscheinung, die hier so wenig wie in der Kunst unsere Gesamtwertschätzung beeinträchtigen darf. Auch die Sonne hat Flecken. Solche Geschmacksverirrungen treten häufiger in kleinen als in großen Zeiten auf und beanspruchen in der Mathematik mit gleicher Unduldsamkeit wie in der Kunst als das allein richtige und wertvolle zu gelten.

Ein älteres Beispiel bietet die sog. Schule der Kombinatoriker, die Lichtenberg [103]) zu den bereits erwähnten sehr berechtigten Ausfällen gegen die Mathematiker seiner Zeit veranlaßte.

Gerade solche Abwege lassen erkennen, daß es in der Mathematik eben nicht nur darauf ankommt, Wahres zu finden — das ist selbstverständlich —, sondern das Wahre soll auch schön und wertvoll sein. Nur ein Rest der Kombinatorik bestand im Lauf der Zeiten diese Probe und ging in den eisernen Bestand der Mathematik über. Ein Beispiel einer, wenn auch in ihren Grundlagen als wertvoll anerkannten, doch in ihren höchsten Gipfeln noch immer umstrittenen Disziplin aus neuerer Zeit bietet die sog. Mengenlehre, die sich die Erforschung des aktual Unendlichen zum Ziel setzt, von dem bekanntlich nicht nur Aristoteles [104]), sondern auch Gauss nichts wissen wollten. Einer ihrer besten Vertreter (Hausdorff [105])) sagt von ihr: „in ihr ist schlechthin nichts selbstverständlich, häufig das Richtige paradox, das Plausible falsch". Und der bedeutendste unter ihren Gegnern (Poincaré [106])) nennt sie „un cas très intéressant pathologique". Erst spätere Zeiten werden mit der Entfernung auch die Objektivität gewinnen, um das bleibend Wertvolle auszusondern. Aber schon jetzt scheint es, daß auch der Mathematiker seine kühnsten Türme nicht in den Himmel bauen kann, so sehr er sich auch mit Hilbert [107]) dagegen sträubt, unüberwindliche Grenzen, ein „ignorabimus" Du Bois Reymonds [108]), im rein geistigen Reiche deduktiver Forschung zuzugeben.

Der Geschmack ist nicht nur individuell verschieden, auch Völker haben ihren Geschmack, der sich deutlich und für alle sichtbar in ihren Kunstschöpfungen, den wenigen Eingeweihten auch in der Mathematik erkennbar kundgibt. Der ideale Grieche brachte die reine Geometrie und Arithmetik zu hoher Blüte, bei dem praktischen Römer kam die Geometrie über Feldmeßkunst, die Arithmetik über kaufmännisches Rechnen nicht hinaus. Der praktische Sinn des Angelsachsen feiert in den Anwendungen der Mathematik auf Physik und Technik hohe Triumphe, während der sog. „Esprit" des Romanen mehr auf das Abstrakte gerichtet ist, der grüblerische Deutsche sich besonders tief in die Mysterien der Zahlenlehre versenkt und bis zu den letzten Grundlagen von Zahl und Raum vorzudringen trachtet. Den Gegensatz englischen und deutschen Geistes sieht man z. B. an der Infinitesimalrechnung, die zugleich von Newton in einer speziell auf die Mechanik und Physik praktisch zugeschnittenen Form, und von Leibniz als durchaus selbständige Disziplin von allgemeiner Bedeutung und Anwendbarkeit begründet wurde.

Faßt man Völker in Rassen zusammen, so kann man auch in der Mathematik die große unverwischbare Trennungslinie zwischen West und Ost unzweideutig nachweisen. Die Mathematik der Babylonier, Ägypter, Araber war wesentlich auf das Arithmetische gerichtet; die Geometrie blieb, wie Kant [109]) es nennt, ein bloßes Herumtappen, bis erst die Griechen den königlichen Weg der Wissenschaft fanden. Bei den modernen Völkern ist eine stark entwickelte fruchtbare Raumanschauung nach Felix Klein [110]), selbst einem unserer größten Geometer, besonders als ein Vorzug der teutonischen Rasse festzustellen. Unsere größten Geometer: Steiner, Möbius, v. Staudt, Riemann, Lie, Grassmann, sind in der Tat Germanen.

Jenseits der erwähnten Trennungslinie, besonders bei der jüdischen Rasse, findet Klein vor allem ausgeprägt den rein-logischen, scharf-kritischen Sinn. „Einen zersetzenden Kritizismus" [111]), der gerade das angreift und zu stürzen sucht, was man als am sichersten dastehend betrachtete. Der von Klein [112]) bedauerte Mangel an Raumsinn führt dort zur Geringschätzung und Unterschätzung des Anschauungsmäßigen, zur Bevorzugung des Unanschaulichen, ja zum Geschmack am Anschauungswidrigen, am Paradoxen, am Widersinnigen. Dem mangelnden Anschauungsvermögen gemäß findet Weierstrass [113]) namentlich bei den Semiten auch einen Mangel an Phantasie oder Intuition. „Vergleiche sind lehrreich: der allumfassende, auf das Höchste, das Ideale gerichtete Blick zeichnet Abel vor Jacobi, Riemann vor allen seinen Zeitgenossen (Eisenstein, Rosenhain), Helmholtz vor Kirchhoff (o b w o h l bei dem letzteren kein Tröpfchen semitischen Blutes vorhanden) in ganz eklatanter Weise aus."

Andererseits gehört gerade die an Kirchhoff gepriesene Gabe, nicht bloß anzufangen, sondern zu vollenden (Voigt) [114]), zu den besten deutschen Eigenschaften: nicht bloß in schnellem Erfolge neue Gebiete abgrasen und rastlos weiter schweifen, sondern verweilen, das Ergriffene liebevoll pflegen, zur Blüte und Frucht bringen; das ist gute deutsche Art.

Mit dem ausgebildeten Raumsinn der deutschen Rasse hängt auch das Bestreben zusammen, nicht bloß mechanisch anzusammeln, sondern in die Höhe strebend organisch aufzubauen; wie auch Gauss [115]) nicht bloß Mauersteine liefern wollte, sondern ein Gebäude, sei es nun ein Tempel oder eine Hütte.

So wird die Mathematik ein Spiegel der Rassen und beweist das Vorhandensein von Rasseneigenschaften auf geistigem Gebiete gewissermaßen mit mathematischer, also unwiderleglicher Sicherheit.

Überblickt man die grosse Reihe der Forscher, an deren Spitze Gauss, der „princeps mathematicorum" [116]), steht, so gewahrt man die außerordentliche Staffelung und Mannigfaltigkeit, deren der menschliche Geist fähig ist. Da ist keine Spur von Gleichheit, nein, äußerste Verschiedenheit nach Art und Grad herrscht hier.

„Es sind von Zeit zu Zeit in der Weltgeschichte hochbegabte, selten bevorzugte Naturen aus dem Dunkel ihrer Umgebung hervorgetreten, welche durch die schöpferische Kraft ihrer Gedankenwelt und durch die Energie ihres Wirkens einen so hervorragenden Einfluß auf die geistige Entwicklung der Völker ausgeübt haben, daß sie gleichsam als Marksteine zwischen den verschiedenen Jahrhunderten dastehen, von denen ein neuer Kulturzustand unseres Geschlechts seinen Anfang genommen hat. — Sie sind es vornehmlich gewesen, welche durch die Großartigkeit ihres Strebens, wie durch die Reinheit ihrer Gesinnung, der nach einem fernen Ziele ringenden Menschheit als Leitstern vorgeschwebt, in deren leuchtenden Strahlen die Nationen sich erwärmt, an denen im Glück, wie im Unglück die Herzen sich emporgehoben und an denen sie sich gehalten haben, wenn Entsittung, Erniedrigung, selbst Barbarei ihre innersten, heiligsten Lebensbedingungen zu bedrohen schienen," sagt Sartorius von Waltershausen [117]), Gaussens Freund und Biograph.

Hier in der Wissenschaft finden wir also den Satz gewissermaßen in das helle Licht der Sonne gestellt, der auch das Leben der Völker beherrscht, den Satz: „Männer machen die Geschichte."

Nur der Geist strebt aufwärts, nur der starke Geist vermag die „Masse Mensch", die aus sich selbst nur sinken kann, empor zu reißen. Das deutsche Volk hat zu allen Zeiten und in allen seinen Stämmen große Männer hervorgebracht, mehr Dichter und Denker zwar, aber auch Tatmenschen. Es braucht nicht zu verzagen; wenn es nur will, die Männer werden da sein, die es aufwärts führen!

# Anmerkungen.

1) Novalis (Friedrich von Hardenberg) Schriften (hrsg. v. Heilborn, Berlin 1901) II, 1, S. 223.

2) Vgl. C. G. J. Jacobi in einem Briefe an Alexander von Humboldt, s. Kronecker, Über den Zahlbegriff, J. f. Math. 101 (1887), S. 337.

3) Göttingen, 2. IX. 1808, s. Briefw. Gauss-Bolyai, hrsg. v. Schmidt und Stäckel (1899) S. 94.

4) L. Wiese, Lebenserinnerungen und Amtserfahrungen, Bd. 1 (1886) S. 220.

5) a. a. O.[1]) S. 223.

6) Plutarch, Συμποσιακῶν προβλημάτων βιβλ. ὄγδοον, Bibl. Didotiana 52 (Paris 1890) S. 875.

7) Baum (Gauss' Arzt.) an Alexander von Humboldt, Göttingen 28. V. 1855, s. K. Bruhns, Briefw. zw. A. v. Humboldt und Gauss (Leipzig 1877) S. 75.

8) Über Leibniz' Äußerung und seine Reihe $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdot\cdot$ für den Kreisinhalt vom Durchmesser Eins, s. Kummer, Über einige mathematische und philosophische Grundanschauungen Leibnizens, an dem Beispiele der Leibnizschen Reihe für die Quadratur des Cirkels betrachtet; Festrede auf der öffentl. Sitzung zur Feier des Leibnizischen Jahrestages der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 4. VII. 1867; vgl. auch Kronecker, Brief an Vahlen, Acta Mathematica, 23, S. 104.

9) Vergil, Ecloga VIII, 75. Corpus poëtarum latin., ed. Postgate, I (London 1894) S. 111.

10) a. a. O.[8]) S. 395.

11) Parerga II, § 35.

12) Vgl. in bezug auf Schopenhauer die sehr beachtenswerten Ausführungen von Pringsheim in dem Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung XIII (1904) S. 357 ff.

13) Lond. Philos. Transactions, 160 (1870) S. 497—518.

14) Die Welt als Wille und Vorstellung I, 1, § 15. Hülfslinien bezeichnet er als Schlingen, um den Lernenden einzufangen.

15) Über die vierfache Wurzel des Satzes vom zureichenden Grunde, Kap. VI, § 39.

16) Analyt. post. I, 27.

17) Vgl. Pringsheim (a. a. O. S. 360): „Trotz allen Herumredens gelingt es Schopenhauer überhaupt gar nicht, eine scharfe und brauchbare **Definition** des nach seiner Ansicht existierenden, spezifisch mathematischen **Seinsgrundes** aufzustellen.“

18) Z. B. umfaßt der ursprüngliche Lindemannsche Beweis der Unmöglichkeit der Kreisquadratur (Königl. preuß. Akad. d. Wissensch., Berichte 1882, II, S. 679) in der Weierstrass'schen Vereinfachung noch 20 Seiten, mein Beweis (Math. Ann. 53, 1900, S. 457) 3 Seiten. — Gauss (Werke II, S. 160) erklärt „die Auffindung neuer Beweise . . . öfters für wenigstens ebenso wichtig, als die Entdeckung der Wahrheit selbst“.

19) S. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 14. Über die vielen späteren Beweise s. Loria in den Rivista di Matematica 1891, I, III.

20) Daran schließen sich zahlreiche spätere Beweise, die Baumgardt (Über das quadratische Reziprozitätsgesetz, Leipzig 1885) systematisch geordnet hat.

Für die beiden wichtigsten Gruppen gebe ich hier zwei bisher unveröffentlichte Beweise äußerster Einfachheit.

I. p, q prim, u, v ungrade, $< q$. Es ist immer $up \equiv (-1)^{\left[\frac{up}{q}\right]} \cdot v \pmod q$; denn es ist entw. $up = \left[\frac{up}{q}\right] q + v$ oder $up = (\left[\frac{up}{q}\right] + 1) q - v$. Zweitens ist $\left[\frac{up}{q}\right] + \left[\frac{gp}{q}\right] = p-1$ für $u + g = q$, also $\sum\limits_{u=1,3,5,\ldots q-2} \left[\frac{up}{q}\right] \equiv \sum\limits_{k=1,2,\ldots \frac{q-1}{2}} \left[\frac{kp}{q}\right] \pmod 2$.

Das Produkt der ersten Kongruenz über alle u gibt demnach:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = p^{\frac{q-1}{2}} \equiv (-1)^{\sum\limits_u \left[\frac{up}{q}\right]} \equiv (-1)^{\sum\limits_k \left[\frac{kp}{q}\right]} \pmod q,$$

$$\text{also } \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\sum\limits_k \left[\frac{kp}{q}\right] + \sum\limits_h \left[\frac{hq}{p}\right]} = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \quad (\text{q. e. d}),$$

denn $\sum\limits_k \left[\frac{kp}{q}\right]$, $\sum\limits_h \left[\frac{hq}{p}\right]$ sind die Anzahlen der ganzen Zahlenpaare (a, b) mit $o < a < \frac{p}{2}$, $o < b < \frac{q}{2}$, in denen $\frac{a}{p} < \frac{b}{q}$ bzw. $\frac{b}{q} < \frac{a}{p}$ ist.

II. a, b die qu. Reste und Nichtreste (mod p); $\sum\limits_a x^a - \sum\limits_b x^b = G$, $x^p = 1$. Bekanntlich leicht beweisbar ist: $G^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$, also $G^{q-1} = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right) \pmod q$. Andererseits $G^q = \left(\frac{q}{p}\right) G + q \cdot X$, wo X ganze Funktion von x. Also $G^2 \cdot (G^{q-1} - \left(\frac{q}{p}\right)) \equiv o \pmod q$, mithin $(-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$; (q. e. d.)

21) Lichtenberg, Vermischte Schriften, Göttingen 1801, II, S. 287.

22) W. Hamilton, Recension einer Schrift von Whewell, Toughts on the study of mathematics as a part of a liberal education, Edinburgh Review, 62 (1836), S. 409 ff. deutsch: Über den Wert und Unwert der Mathematik, Kassel 1836.

23) Geflügeltes Wort an den humanistischen Anstalten des 18. Jahrhunderts. Vgl. W. Ahrens, Scherz und Ernst in der Mathematik, Leipzig 1904, S. 477.

24) Sitzungsberichte der Königl. preuß. Akad. d. Wissenschaften 1884, S. 747.

25) Vgl. P. Stäckel, Geltung und Wirksamkeit der Mathematik, Karlsruhe 1910, S. 9.

26) System der deduktiven und induktiven Logik, dtsch. v. J. Schiel, 4. Aufl., Braunschweig 1877, 2. Teil, S. 179.

27) Vgl. E. Löwi, Mathematische Methoden in den biologischen Wissenschaften, Berlin und Wien 1915; in Abderhalden, Handbuch der biochemischen Arbeitsmethoden.

28) Cours de philosophie positive, Paris 1830—1842, III, S. 414/416.

29) Vgl. Pareto, Anwendungen der Mathematik auf Nationalökonomie, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, I, 2, Leipzig 1900—1904, S. 1094 ff. O. Hölder (Rektoratsrede Leipzig 1918, S. 16) hält hier eine weitgehende Anwendung der Mathematik für möglich und in hohem Grade wünschenswert. Auf die Möglichkeit und Notwendigkeit Tarif-Fragen mathematisch zu behandeln, habe ich im „Tag" 16. VI. 1908 und 23. VII. 1912 hingewiesen. Seitdem sind derartige Fragen besonders von Voigt und Riebesell bearbeitet, die Ergebnisse von den betr. Behörden aber nicht genügend verwertet worden. Voigt hat die von mir als Steuerformel in Worten angedeutete Formel mißverständlich als Trinom 2. Grades gedeutet, während man die Potenz eines Binoms nehmen muß. Auch die Börsen-Kurse sind mathematisch zu behandeln, wie in dem zweiten meiner oben erwähnten Aufsätze nachzulesen.

30) Psychologie als Wissenschaft neu gegründet auf Erfahrung, Metaphysik und Mathematik. Ges. Werke, hrsg. v. Hartenstein, V. VI.

31) Elemente der Psychophysik 1860, 2. Aufl. 1889.

32) Sartorius von Waltershausen, Gauss zum Gedächtnis, Leipzig 1856, S. 79.

33) Saggiatore, Opere, VI, Firenze 1890/1900, S. 233.

34) Die Mathematik umfaßt zwar auch Disziplinen, in denen das Quantitative bedeutungslos ist, wie Zahlentheorie, Gruppentheorie, Geometrie der Lage u. a., aber gerade diese Gebiete scheinen keine Verwendbarkeit in den Naturwissenschaften zuzulassen. Über Gauss'

Ansicht betr. Erfassung der „intensiven“ Größen durch die Math. s. [32]) S. 98.

35) Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft, Vorrede, Philos. Bibl. 49 (1872), S. 177.

36) Die Mathematik in ihren Beziehungen zu anderen Wissenschaften. Leipzig 1879.

37) Τζέτζης. Historiarum var. Chiliades VIII, 972—975, ed. Kiessling, Leipzig 1826, S. 322. Joh. Philoponus, In Aristotelis de anima libros commentaria, I, 3d, 3v, s. Commentaria in Aristotelem graeca (Ausg. d. Königl. preuß. Akad. d. Wissensch.) 15, 1897, S. 117; 18, I, 1900, S. 118, 119.

38) Die Mathematik im Verhältnis zu andern Wissenschaften, Leipzig 1918, S. 16.

39) Festrede, Königl. preuß. Akad. d. Wissensch. 3. VII. 1873, Berl. Monatsber. 1873, S. 517.

40) *Πολιτεία,* Buch VII, Kap. IX, 527.

41) Vgl. von Strausberg, Eugen von Savoyen.

42) Vgl. sein Wort: „J'aurais fait mon chemin dans la route des Galilée, des Newton . . . Aucune autre gloire n'aurait pu tenter mon ambition.“ s. Arago, Oeuvres I (1854) S. 250 = Werke I (1854) S. 148.

43) a. a. O [10]) S. 372. — Auch von Gauss heißt es (a. a. O. [32]) S. 90): „Er würde ohne Frage ein vortrefflicher Finanzminister gewesen sein, der beständig mit dem größten Geschick, mit der größten Umsicht und Gerechtigkeit operiert haben würde . . .“ (S. 94): „Von der Intelligenz und Moral der großen Menge hatte er nur einen sehr geringen Begriff und hat dieses namentlich in bezug auf politische, religiöse und wissenschaftliche Dinge oft ausgesprochen . . . Von unsern konstitutionellen Regierungssystemen hatte er nur eine sehr geringe Meinung und er war unablässig bemüht, unsern parlamentarischen Größen entweder logische Fehler oder Mangel an Sachkenntnis nachzuweisen.“

44) Buch VII, Kap. VIIff.

45) 11. VIII. 1731, s. Correspondence mathém. et phys. de quelques célèbres géomètres du 18ème siècle, II, 1843, S. 10 = J. f. Math. 23, 1842, S. 200.

46) „Sie müßten . . . die gantze mathematica lernen . . . da durch doch wunder geschickte leut aus worden zu allerley hernach tüchtig.“ An die Ratherren aller Städte deutsches Lands, daß sie christliche Schulen aufrichten und halten sollen, 1524, s. Werke (Weimar 1899) S. 46.

47) Praefatio in arithmeticen Georgii Joachimi Rhetici, s. Corpus

Reformatorum, ed. Bretschneider, XI, Halle 1843, S. 288; Praefatio in arithmeticam integram Mich. Stifel, Nürnberg 1544.

48) Über Gauss a. a. O. [32]) S. 8, 95.

49) Jacobi, Werke I, S. 23. Vgl. auch S. 5: „Der ungeheure Koloß, den die Arbeiten eines Euler, Lagrange, Laplace hervorgerufen haben, erfordert die ungeheuerste Kraft und Anstrengung des Nachdenkens, wenn man in seine innere Natur eindringen will und nicht bloß äußerlich daran herumkramen. Über diesen Meister zu werden, daß man nicht jeden Augenblick fürchten muß von ihm erdrückt zu werden, treibt ein Drang, der nicht rasten und ruhen läßt, bis man oben steht und das ganze Werk übersehen kann."

50) Braunschweig, 3. IX. 1805, s. Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke, hrsg. v. C. Schilling, II 1900, S. 268/269 u. Schering, Carl Friedrich Gauss' Geburtstag nach hundertjähriger Wiederkehr, Göttingen 1877, S. 14.

51) Waring (Medit. alg. ed. 3. Cambridge 1782, S. 349/350) hatte vermutet, daß zur Darstellung einer natürlichen Zahl a als Summe n-ter Potenzen nicht negativer ganzer Zahlen eine von a unabhängige Anzahl solcher genüge. Nach vielen Teilergebnissen von Liouville, Realis, Lucas, Fleck, Landau, Wieferich, Maillet, Hurwitz, bewies Hilbert 1909 die Waringsche Vermutung allgemein.

52) Pierre de Fermat (+ 1665) hat in seinen 'Observationes' zu des 'Diophanti Alexandrini arithmeticorum libri sex et de numeris multangulis liber unus, cum commentariis C. G. Bacheti 1670' gesagt: „Cubum autem in duos cubos aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duas ejusdem nominis fas est dividere; cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet." Für die dritten und vierten Potenzen bewies Euler den Satz, für die fünften und vierzehnten Lejeune Dirichlet, für die siebenten Lamé. Dieser letztere Beweis läßt eine bedeutende Vereinfachung und Abkürzung (zugleich Ausdehnung) durch die Bemerkung zu, daß infolge der Gleichung $s_7 = o$ auch wäre $s_2^4 + 6\, s_2^2\, s_1^4 - \frac{1}{7} s_1^8 = (4\, t_4)^2$, ($t_4$ Summe aller Monome 4ter Ord.). Auf diese Gleichung ist, wie auf diejenigen Gleichungen der Form $x^4 + a\, x^2\, y^2 + b\, y^4 = z^2$ die Fermatsche „méthode de descente infinie" anwendbar, welche durch

$$x = \xi^2 - b\, \eta^2,\ y^2 = 4\, \xi\, \eta\, (\xi^2 + a\, \xi\, \eta + b\, \eta^2),$$
$$z = \xi^4 + 2\, a\, \xi^3\, \eta + 6\, b\, \xi^2\, \eta^2 + 2\, a\, b\, \xi\, \eta^3 + b^2\, \eta^4$$

gelöst werden. Kummers erster (zweiter) Beweis gilt für alle Primzahl-Exponenten, die in der Klassen-Anzahl des zugehörigen Kreiskörpers nicht (nur in erster Potenz) enthalten sind. Dem ersten Kummer-schen Beweis entzogen sich unter 100 nur die Primzahlen 37, 59, 67, für die die Voraussetzung des zweiten Beweises zutrifft. Seit Kummer ist der Satz für keinen weiteren Exponenten bewiesen worden. Über das Wolfskehl-Preisausschreiben (100000 Mk.) s. Math. Ann. 66, 1909, S. 243.

53) S. z. B. meine „Konstruktionen und Approximationen", Leipzig und Berlin 1911.

54) An Bessel, Göttingen 23. XII. 1816, s. Briefw. Gauss-Bessel, 1880, S. 247.

55) H. v. Helmholtz, Vorträge und Reden, II, 1884, S. 185. Dies Bild kommt ähnlich schon bei den Alten vor, s. E. du Bois Reymond, Reden, I, 1886, S. 254.

56) S. z. B. Runge's Doktorthese Berlin 23. VI. 1880.

57) Über den mathematischen Hochschulunterricht, Jahresbericht d. deutschen Mathematiker-Vereinigung, XI (1902), S. 247. Vgl. z. B. auch Uhde, Die höhere technische Lehranstalt oder die technische Abteilung des Herzoglichen Collegii Carolini, Braunschweig 1836; und die Doktorthese F. Rudio's, Berlin 23. VI. 1880.

58) Anfänge und Entwicklung der neueren Auffassungen der Grundlagen der Geometrie, Jahresbericht d. deutschen Math. Vereinigung, XI (1902), S. 385.

59) Ansprachen und Reden, gehalten bei der Helmholtz-Feier 2. XI. 1891 (Berlin 1892), S. 48. Vgl. auch L. Boltzmann, Gustav Robert Kirchhoff, Akad. Festrede, Graz 15. XI. 1887, Leipzig 1888, S. 28.

60) In der Vorrede von Eisensteins Mathematischen Abhandlungen, Berlin 1847. Ähnlich Gauss, Werke, II, S. 159.

61) Acta Acad. Petrop. T. 3. — Vgl. auch v. Helmholtz, a. a. O. 59, S. 54.

62) Gauss an Olbers, Göttingen 23. III. 1816, s. W. Olbers, Sein Leben und seine Werke, hrsg. v. C. Schilling, II, 1900, S. 629.

63) Antrittsrede in der königl. preuss. Akad. d. Wissensch., Monatsberichte, Berlin 1856, S. 350.

64) Antrittsrede in der königl. preuss. Akad. d. Wissensch., Monatsberichte, Berlin 1856, S. 379.

65) Oeuvres I, 1854, S. 167/168 = Werke I, 1854, S. 134.

66) Vgl. Gutzmer, Zum Jubiläum der Logarithmen, Leipzig und Berlin 1914, S. 13.

67) S. Zeitschr. f. math. nat. Unt. 26, 1895, S. 356 und ähnlich in seiner Antrittsrede Universität Leipzig 25. X. 1880, Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung XIX, 1910, S. 289.

68) a. a. O. [63]) S. 350.

69) Gauss an Bessel, Göttingen 14. III. 1824, s. Briefw. Gauss-Bessel, 1880, S. 428. Vgl. auch Gauss' Äußerungen zu seiner magnetelektrischen Telegraphie in Briefen an Schumacher vom 6. VIII. 1835,

13. IX. 1835 und Sterns Denkrede, Göttingen 30. IV. 1877, S. 15, auch a. a. O. [32]) S. 96. Vgl. ferner Jacobi: „le but unique de la science c'est l'honneur de l'esprit humain", Brief an Legendre v. 2. VII. 1830, J. f. Math. 80, S. 272.

70) s. [2]) und a. a. O. [32]) S. 93. Vgl. auch Gauss' Worte: „Es ist mir gleichgültig, ob der Saturn fünf oder sieben Monde hat; — es giebt etwas Höheres in der Welt" (a. a. O. [32]) S. 99). „Ob ich die Mathematik auf ein Paar Dreckklumpen anwende, die wir Planeten nennen, oder auf rein arithmetrische Probleme, es bleibt sich gleich, die letzteren haben nur noch einen höheren Reiz für mich" (a. a. O. [32]) S. 101/102).

71) Sämtl. Schriften, Ausg. v. Goedeke, XI, 1871, S. 188.

72) Antrittsrede an der Pariser Akademie 1742. Vgl. E. Lampe, Die Entwicklung der Mathematik im Zusammenhange mit der Ausbreitung der Kultur, Festrede Berlin 1893, Hoffmanns Ztschr. f. Math., XXIV, 1893, S. 287.

73) Jahresbericht d. deutschen Math. Vereinigung XIII, 1904, S. 381.

74) S. z. B. K. Boehm, Die Mathematik in der Natur. Heidelberg 1900, S. 15; und R. Baldus, Mathematik und räumliche Anschauung, Jahresber. d. dtsch. Math. Vereinigung XXX, 1921, S. 2.

75) Trilogy, Philos. Transactions, CLIV, 3, 1864, S. 613 = Britisch Assoc. Report 1869, Notices and Abstracts, S. 7.

76) Über die physiologischen Ursachen der musikalischen Harmonie, Vorlesungen, Bonn, Winter 1852, s. Vorträge und Reden I, 1884, S. 82.

77) Gustav Robert Kirchhoff, Akad. Festrede, Graz 15. XI. 1887, Leipzig 1888, S. 28.

78) Doktorthese Berlin 1845, s. Werke I, S. 73.

79) Math. Ann. 21 S. 564; vgl. auch Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883, S. 19.

80) Über den Anteil der mathematischen Wissenschaften an der Kultur der Renaissance, Heft 12 der Virchow-Holtzendorffschen Sammlung gemeinverständlicher wissenschaftlicher Vorträge, S. 19. — Vgl. z. B. auch Poincaré, Sur les rapports de l'analyse pure et de la physique mathématique, Verhandlungen des 1. intern. Math. Kongr., Zürich 1897, Leipzig 1898, S. 82; und Boltzmann, Gustav Robert Kirchhoff, Festrede Graz 15. XI. 1887, Leipzig 1888, S. 25/30.

81) Grundlagen des XIX. Jahrhunderts I, 4. Aufl., München 1903, S. 88.

82) Dem Math. Verein der Universität Berlin zum 29. Stiftungsfest, Dez. 1890; s. Bericht des Math. Vereins Ostern 1890 bis Ostern 1891,

S. 9. Als „Übersetzung von befreundeter Hand*)" hatte Kronecker beigefügt:

Nonne mathematici veri natique poetae?
Sunt, sed quod fingunt, hosce probare decet.

*) Johannes Vahlen.

83) Werke Bd. I S. VI.

84) Gauss an Schumacher, Göttingen 17. IX. 1808, s. Briefw. Gauss-Schumacher I, 1860, S. 2.

85) Werke II, S. 115. Auch A. v. Humboldt (Kosmos, Stuttgart und Tübingen 1847, II, S. 384) spricht von dem fesselnden, vom ganzen Altertum gefeierten Zauber in der Anschauung mathematischer Wahrheiten.

86) In seinem curriculum vitae (1843), s. Abh. z. Gesch. d. Math. VII, 1895, S. 157.

87) Bedeutung und Wert mathematischer Erkenntnisse, Vortrag gehalten in der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Wien 1917, S. 5. — Vgl. auch O. Hölder, a. a. O. S. 19.

88) De harmonia mundi. Vgl. Rembrandt als Erzieher, Leipzig 1890, S. 62.

89) a. a. O. [8]) S. 395.

90) Mathematische Probleme. Vortrag, Math. Kongr. Paris 1900, s. Gött. Nachr. 1900, Math. phys. Kl. S. 257 = Arch. Math. Phys. (3) 1, 1901, S. 48.

91) Briefw. Gauss-Schumacher II, 1860, S. 408. Auch Gauss (vgl. z. B. Werke II, S. 186) sprach seine Wertschätzung des Einfachen aus.

92) Vorlesungen über math. Physik I, Mechanik, 1876, S. 1. Verwandte Aussprüche s. Gauss, Werke V, 1877, S. 315; Mach, Populärwiss. Vorl., 3. Aufl., Leipzig 1903, S. 263.

93) Die Einsteinsche Gravitationstheorie, Leipzig 1921, S. (6, 18) 62.

94) J. Spence, Anecdotes, observations and characters of books and men. Collected from the conversation of Mr. Pope and other eminent persons of his time, second edition by S. W. Singer, London 1858, S. 40.

95) Geltung und Wirksamkeit der Mathematik, Jahresber. d. deutschen Math. Vereinigung XX, Leipzig 1911, S. 120.

96) a. a. O. [32]) S. 102.

97) G. F. Knapp, Münchener Allgem. Zeitg., Beilage 11. III. 1903, S. 450.

98) Cirey, 27. II. 1739, Oeuvres de Frédéric le Grand, XVII, Edition Decker 1851, S. 22.

99) Oeuvres II, 1854, S. 694 = Werke II, 1854, S. 573.

100) a. a. O. [86]) S. 157.

101) Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten, Akademischer Vortrag, Tübingen 29. IV. 1869, 2. Aufl., Tübingen 1884, S. 21.

102) Der Geschmack in der neueren Mathematik, Leipzig 1890, S. 6/7.

103) a. a. O. [21]).

104) Metaph. K. 10. De generat. et corrupt. l, 3. Phys. III, 5 u. 6. — Gauss' Briefw. mit Schumacher II, 1831, S. 268. S. jedoch G. Cantor, zum Problem des actual Unendlichen, Natur und Offenbarung 32, 1886, S. 226. — Die Mengenlehre bietet das merkwürdige Beispiel, daß die Meinungen darüber geteilt sind, ob ein Satz in ihr, der von der Wohlordnung bewiesen ist oder nicht. Der Beweis dieses Satzes: „Jede Menge kann wohlgeordnet werden" erfordert eine unendliche Anzahl von Operationen. Läßt man das zu, so kann man mit demselben Recht behaupten, man kann über die Transzendenz von $2^{\sqrt{2}}$ entscheiden, wie: man kann das Kontinuum wohlordnen; was man bekanntlich, trotz des erwähnten, angeblich bewiesenen Satzes, nicht zu können zugibt.

105) Mengenlehre, Leipzig 1914, S. V.

106) Sur l'avenir des mathématiques, 4. intern. Math. Kongr. Rom 1908, Rendiconti di Palermo 1908.

107) a. a. O. [90]) S. 261 bzw. S. 51.

108) Reden, I, 1886, S. 130.

109) Vorrede zur 2ten Ausgabe der Kritik der reinen Vernunft, Philos. Bibl. II, Berlin 1870, S. 24. Vgl. Euklids Wort zu Ptolemaeus: „Es gibt keinen Königsweg in der Geometrie", Proclus Diadochus, in prim. Eucl. elem. libr. comm. ed. Friedlein, 1873, S. 68; und H. Hankel, Projektive Geometrie, Leipzig 1875, S. 33.

110) The evanston colloquium, Lectures on mathematics, Evanston Ill. 1893, New York 1894, S. 46.

111) Vgl. Harzer, Jahresber. d. deutschen Math. Vereinigung XIV, Leipzig 1905, S. 338.

112) Über Aufgabe und Methode des math. Unterrichts an den Universitäten, Vortr. Naturf. Vers. Düsseldorf 1898, Jahresber. d. deutschen Math. Vereinigung VII, 1897/98, S. 137.

113) Mittag Leffler, Une page de la vie de Weierstrass, Compte rendu du deuxième congrès intern. des mathém. Paris 1900, Paris 1902, S. 150.

114) Zum Gedächtnis von G. Kirchhoff S. 9, Göttinger Abhandlungen XXXV, 1888.

115) Gauss an Schumacher, Göttingen 12. II. 1826.

116) Dieses ursprünglich Euler beigelegte Prädikat ging später auf Gauss über.

117) Gauss zum Gedächtnis, Leipzig 1856, S. 7.