HAMBURGER UNIVERSITÄTSREDEN

31

MODERNE DENKWEISEN DER MATHEMATIK

Rede

anläßlich der Feier des Rektorwechsels
an der Universität Hamburg am 12. November 1963

von

Dr. rer. nat. Emanuel Sperner
ordentlicher Professor für Mathematik
und Direktor des Mathematischen Seminars
der Universität Hamburg

1964
IM SELBSTVERLAG DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Meine sehr verehrten Damen und Herren!

Die Begegnung mit der Mathematik, die für viele, sei es in der Schule, sonstiger Ausbildung oder im Beruf, unausweichlich ist, scheint bei den Betroffenen einen nachhaltigen Eindruck zu hinterlassen, der sich nicht selten in einer ebenso dauerhaften wie unverhohlenen Abneigung oder Zuneigung zu dieser Wissenschaft äußert. Es ist, als ob die „Ars Mathematica", deren Schönheit bei den einen Bewunderung und Begeisterung hervorruft, während sie von anderen als recht herb und spröde empfunden wird, keine Lauheit duldet, sondern jeden, der sich ihr nähert, zu einer klaren Entscheidung „für oder wider" herausfordert. Jedenfalls wird eine solche Deutung nahegelegt durch die zahlreichen, oft recht gefühlsbetonten Aussprüche und Zeugnisse bedeutender Geister über ihre Erfahrungen mit unserer Wissenschaft. Die Äußerungen darüber reichen von der Ansicht, daß „die Mathematiker mit dem Teufel im Bunde seien" — so der Kirchenvater AUGUSTINUS[1]) — bis zu den begeistertsten Lobsprüchen etwa bei dem Dichter NOVALIS, der die Mathe-

[1]) Im Original heißt es: „Quapropter bono christiano sive mathematici sive quilibet inpie divinantium, maxime dicentes vera, cavendi sunt, ne consortio daemoniorum animam deceptam pacto quodam societatis inretiant."
Aurelius Augustinus (345—430), De genesi ad litteram. Die angegebene Stelle findet sich z. B. in „Corpus scriptorum ecclesiastorum latinorum", Vol. XVIII, pars 1, S. 61, 26—63, 3. Allerdings hat an dieser Stelle das Wort „mathematici" nicht denselben Sinn wie heute das Wort „Mathematiker", sondern es sind darunter (dem damaligen Sprachgebrauch entsprechend) Astrologen gemeint. An anderer Stelle äußert sich Augustinus durchaus anerkennend über die Mathematik als Wissenschaft. S. hierzu: „De doctrina christiana", II. 38, 56 und „Epistula", 55, 7, 12-8, 15 (CSEL XXXIV S. 182, 11 f.) — Den Hinweis auf diese Bedeutung des (oft mißverstandenen) obigen Ausspruchs verdanke ich meinem hiesigen Kollegen Professor Dr. theol. *B. Lohse*.

matik als „das höchste Leben", „das Leben der Götter" und die Mathematiker als „die einzig Glücklichen" pries[2]). Es kann schon Verwunderung erregen, daß eine Wissenschaft, die doch im allgemeinen als trocken und nüchtern angesehen wird, so kräftige Gemütsbewegungen auszulösen vermag. Aber sogar die Mathematiker selbst sind nicht frei von zwiespältigen Empfindungen beim Ringen mit den Problemen ihrer Wissenschaft. Kein Geringerer als JACOBI hat als Zwanzigjähriger in einem Briefe geschrieben:

> „Es ist eine saure Arbeit, die ich getan habe, und eine saure Arbeit, in der ich begriffen bin. Nicht Fleiß und Gedächtnis sind es, die hier zum Ziele führen; sie sind hier die untergeordneten Diener des sich bewegenden reinen Gedankens. Aber hartnäckiges, hirnzersprengendes Nachdenken erheischt mehr Kraft als der andauernde Fleiß. Wenn ich daher durch stete Übung dieses Nachdenkens einige Kraft darin gewonnen habe, so glaube man nicht, es sei mir leicht geworden, durch irgendeine glückliche Naturgabe etwa. Saure, saure Arbeit hab' ich zu bestehen, und die A n g s t des Nachdenkens hat oft mächtig an meiner Gesundheit gerüttelt."[3])

Gar manchem werden diese Geständnisse eines so bedeutenden Mathematikers ein großer Trost sein; denn viele mögen ähnliches gespürt haben, wie beispielsweise jener, der rückschauend sagte: Er habe in der Mathematikstunde der Schule oft das Gefühl gehabt, daß ihm, nachdem er gerade laufen gelernt, die Aufgabe gestellt würde, einen hohen Berg zu ersteigen. Das damit angezogene Gleichnis verlockt mich zu weiterer Ausführung.

---

[2]) *Novalis* (Friedrich von Hardenberg, 1772—1801), Mathematische Fragmente, s. etwa Bd. 3, S. 381, der von *E. Wasmuth* herausgegebenen Werke (Berlin 1943).

[3]) *C. G. J. Jacobi* (1804—1851), Gesammelte Werke, Bd. I, S. 23, Berlin 1881 (Die Hervorhebung im Zitat stammt nicht von Jacobi)

Es gibt ja eine ganze Reihe von Wissenschaften — ich denke zum Beispiel an die Archäologie oder die Kunstgeschichte, an manche anschaulichen Gebiete der Naturwissenschaften, etwa der Astronomie —, bei denen der Laie keine besonderen Schwierigkeiten empfindet, mit ihren Ergebnissen bekannt zu werden. Ja, vielen bereitet dies ein ebenso großes Vergnügen wie das Durchwandern eines schönen Gartens, in dem man heute hier und morgen da die schönste Blütenpracht bewundern kann und manche seiner Früchte mühelos genießen darf. Nicht so jedoch in der Mathematik! Das Vordringen in ihre Gebiete ist viel eher der Anstrengung des Bergsteigers vergleichbar. Mühsam erklimmt er Fels um Fels, und hat er sich dann endlich um einen beschwerlichen Felsvorsprung hinaufgeschwungen in der Hoffnung, nun oben zu sein, so steht er vor einem neuen Massiv mit neuen Schwierigkeiten und Mühsalen. Da ermatten viele! Aber andererseits entspricht, so scheint mir, die Befriedigung und Begeisterung, die den Alpinisten erfüllt, wenn ihm eine schwierige Besteigung gelungen ist, ebenso gut dem Gefühl des Mathematikers, der sich auf die Höhen einer neuen mathematischen Theorie heraufgearbeitet hat. Hier wie dort offenbaren sich auf den erklommenen Gipfeln unerahnte weite Ausblicke und tiefe Einsichten in erhabener „Einsamkeit und Freiheit“, Erlebnisse, die wohl zu den schönsten gehören, die einem Menschen geschenkt werden können.

Seit JACOBIS Zeiten hat sich die Situation der Mathematik freilich erheblich geändert, und ihre Bewältigung ist eher noch schwieriger geworden. Es ist keineswegs so, wie Laien — wahrscheinlich wegen des hohen Alters unserer Wissenschaft — oft glauben, daß es in der Mathematik keine wesentlich neuen Dinge mehr zu entdecken gebe. Weit gefehlt! Ein Blick in die jüngere und jüngste Geschichte wird uns sogleich eines Besseren belehren. Nachdem die Renaissance die Mathematik der Griechen wie überhaupt die hellenistische Kultur aus ihrem mehr als tausendjährigen Dornröschenschlaf geweckt hatte, begannen sich nach den ersten Zeiten des Kennenlernens, des Übernehmens und der Neubegründung bald kräftige Impulse zu regen, in neue Bereiche vorzustoßen, die Bewältigung neuer Probleme in Angriff zu nehmen, zu welcher die überlieferten Kenntnisse und Verfahren nicht ausreichten. Teils der eigenständigen Thematik folgend, teils Hand in Hand mit den Problemstellungen in der Physik, damals hauptsächlich der Mechanik, wurden neue Methoden entwickelt, neue Wege gefunden und die Tore geöffnet zu neuen Gefilden der Mathematik. So wurde die Analytische Geometrie begründet, die Zahlentheorie machte ihre ersten Schritte, die Algebra griff zum ersten Mal über die linearen und quadratischen Gleichungen wesentlich hinaus, Aufgaben aus der sogenannten „Analysis des Unendlichen" kommen in Mode und werden mit eigens dafür entwickelten speziellen Methoden, bzw. Rezepten, gelöst[4]). Schließlich finden alle diese Anstrengungen und Leistungen ihre sichtbarste und imponierendste Krönung in der Schöpfung der Differential- und Integralrechnung durch Newton und Leibniz.

Die letztere stellte nun ihrerseits neue durchschlagende und weitreichende Hilfsmittel zur Bearbeitung und Lösung mathematischer und physikalischer Probleme zur Verfügung und leitete damit eine Periode stetigen, zeitweise stürmischen Fortschreitens und Entdeckens ein, die über zweihundert Jahre hinweg bis in unsere Zeit anhielt. Es wäre aber falsch, diese großartige Entwicklung, an der alle jene Gebiete der mathematischen Analysis, welche wir heute

---

[4]) Wer sich über diese Entwicklung, die im Wesentlichen ins 16. und 17. Jahrh. fällt, näher informieren will, sei etwa auf O. *Becker* und *J. E. Hofmann*, Geschichte der Mathematik, verwiesen (Bonn 1951, S. 153 ff.).

schon als klassisch empfinden, Anteil hatten, allein der Fruchtbarkeit der infinitesimalen Methoden zuzuschreiben. Denn bald wurden daneben weitere Antriebskräfte wirksam, die allmählich wuchsen und schließlich zu so kraftvoller Ausbildung gelangten, daß sie zu neuen Methoden und Denkweisen und in deren Folge zu einer neuen Blütezeit der Mathematik führten, in der wir noch mittendrin stehen und deren Auswirkungen noch keineswegs abzusehen, geschweige denn abgeschlossen sind.
Der Beginn dieser neuen Auffassungen und Gedankengänge ist sicher nicht genau datierbar, und ihre Anfänge liegen vielleicht weiter zurück, als wir im stolzen Bewußtsein der Leistungen unserer Zeit anzunehmen geneigt wären. Jedoch kann man eine erste deutliche Ausprägung von zukunftsträchtigen Ideen der fraglichen Art bereits in manchen mathematischen Themen und Theorien finden, die in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts in Erscheinung traten.

Was ich meine, soll sogleich durch einige einfache Beispiele erklärt werden, von denen ich hoffe, daß sie auch dem Laien, wenn er nur etwas Sinn für mathematische Denkweisen besitzt, einiges sagen können. Als erstes Beispiel wähle ich die *Projektive Geometrie*, deren Geburtsstunde wir noch vor das Jahr 1822 ansetzen dürfen; denn in diesem Jahre erschien bereits PONCELET's berühmtes Werk „Traité des propriétés projectives des figures“[5]).
Manchem von Ihnen ist es vielleicht schon widerfahren (so mir selbst), daß eines seiner Kinder aus der Schule mit der je nach Temperament bekümmerten oder entrüsteten Frage nach Hause gekommen ist, was es denn heißen solle, daß zwei parallele Geraden sich im unendlich Fernen schneiden;

---

[5]) Paris 1822; *J. V. Poncelet* lebte von 1788—1867.

das sei doch offenbar unrichtig, wenn nicht gar unsinnig; denn diese träfen sich doch eben nie, was ja sogar ein paar Jahre früher, nämlich bei der Behandlung der gewöhnlichen, d. h. euklidischen Geometrie ausdrücklich gelehrt worden sei. Was soll darauf der also angesprochene Vater erwidern? Nun, er dürfte unbedenklich sagen: Mein Kind, Du hast insofern recht, als sich parallele Geraden ebensowenig nach unserer Wahrnehmung wie nach unserer Vorstellung jemals schneiden; die Mathematiker haben aber gute Gründe, die sogenannten unendlich fernen Schnittpunkte paralleler Geraden als reine Gedankengebilde einzuführen. Das soll heißen: Diese unendlich fernen Punkte sind natürlich nicht gefunden worden, weil sie etwa wirklich da wären, sondern sie sind erfunden worden, weil sie eben nicht da sind, aber nichtsdestoweniger mit großem Nutzen gebraucht werden können. Sie sind reine Gedankendinge, die (in der Ebene noch ergänzt durch eine „unendlich ferne“ Gerade und in der räumlichen Geometrie durch „unendlich ferne“ Geraden und eine ebensolche Ebene) dem Zwecke dienen, diejenigen Eigenschaften geometrischer Figuren, welche wir die projektiven nennen, in überraschend einfacher und harmonischer Weise zu gewinnen und zusammenzufassen. Viele geometrischen Sachverhalte, die ohne diese Betrachtungsweise in zahlreiche Einzelfälle mit lästigen Besonderheiten aufsplittern, erweisen sich in der projektiven Behandlung (d. h. unter Hinzuziehung jener erdachten Raumelemente) als Sonderfälle von Aussagen, die sich damit viel kürzer und einfacher aussprechen und nach einheitlichen Gesichtspunkten herleiten lassen.

Die projektive Geometrie ist in der Tat ein einzigartiges Beispiel für die Schönheit und Kraft des reinen Gedankens, Eigenschaften, mit denen sie auch sofort die bedeutenden Geometer jener Zeit an sich zog, die ihr mit Begeisterung

huldigten und für ihr rasches Aufblühen und Gedeihen sorgten.
Aber nicht nur wegen ihrer reizvollen Erscheinung ist uns die projektive Geometrie ein willkommenes Beispiel, sondern vor allem auch deswegen, weil in ihr eben einige Grundgedanken liegen, die sich später als besonders entwicklungsfähig erwiesen, Grundgedanken übrigens, welche auch in anderen mathematischen Theorien fast gleichzeitig auftauchten. Deswegen wird es, ehe wir diese Gedankengänge weiter verfolgen, lehrreich sein, noch ein anderes Beispiel heranzuziehen, und zwar das der *komplexen Zahlen.* Ich hoffe, daß viele von Ihnen noch eine, wenn auch schwache Erinnerung an das Rechnen mit komplexen Zahlen, das ja seit einiger Zeit auch schon auf der Schule geübt wird, haben. Es kommt uns zunächst wieder darauf an, eine brauchbare Antwort darauf zu finden, was die komplexen Zahlen eigentlich sind. Leider stehen auch heute noch in manchen Schulbüchern etwas wirre oder zumindest verwirrende Ansichten darüber. Als Entschuldigung dafür kann man vielleicht anführen, daß ein Rückblick in die Geschichte zeigt, wie schwer sogar den Fachleuten lange Zeit hindurch eine befriedigende Fassung dieser Konzeption fiel.
Dabei hatten sich die komplexen Zahlen frühzeitig geradezu von selbst den Mathematikern aufgedrängt. Denn schon im 16. Jahrhundert wurden sie von jenen italienischen Algebraikern, denen kurz zuvor die Auflösung der algebraischen Gleichung 3. und 4. Grades gelungen war, eingeführt und im wesentlichen richtig gebraucht, so in einem Lehrbuch der Algebra vom Jahre 1572, herausgegeben von RAFAEL BOMBELLI[6]). Aber während die einen die komplexen Zahlen unbedenklich und mit Geschick benutzten, un-

[6]) *R. Bombelli* (16. Jahrhundert), L'Algebra, Bologna 1572, Titelauflage erst 1579.

terliefen anderen, ja sogar EULER, Widersprüche[7]), was schon darauf hindeutet, daß ihr Begriff noch lange Zeit unklar und unscharf war; wieder andere empfanden bei ihrem Gebrauch ein so großes Unbehagen, daß sie sie ablehnten. Vielleicht kam diese Abneigung auch davon, daß man mit dem Namen „Zahl“ zwangsläufig die Vorstellung verband, daß sie zum Zählen oder Messen dienen müßte; aber gerade dafür fand man die komplexen Zahlen nicht tauglich. Selbst bei LEIBNIZ, der sie an sich begeistert akzeptierte und wohl zu gebrauchen wußte, wird der Zweifel der Zeitgenossen noch spürbar, wenn er die „imaginären Wurzeln eine feine und wunderbare Zuflucht des Geistes, beinahe ein Zwitterwesen zwischen Sein und Nichtsein“ nennt[8]).

Es ist erstaunlich, daß die komplexen Zahlen trotz ihrer frühzeitigen Entdeckung erst mit Beginn des vorigen Jahrhunderts endgültig Hausrecht in der Mathematik erhielten, und zwar in erster Linie durch die Autorität des großen GAUSS, der ihnen eine anschauliche geometrische Deutung zu geben wußte und immer wieder nachdrücklich für sie ein-

---

7) *L. Euler* (1707—1783) überschreibt in seiner „Vollständigen Anleitung zur Algebra“ das Kapitel 13 „Von den ohnmöglichen oder imaginären Zahlen“ und äußert dort in § 144: „Von diesen behauptet man also mit allem Recht, daß sie weder größer noch kleiner sind als nichts, und auch nicht einmahl nichts selbsten, als aus welchem Grunde sie folglich für ohnmöglich gehalten werden müssen.“ In § 146 setzt er gemäß seiner Definition imaginärer Zahlen $\sqrt{-3}\;\sqrt{-3} = -3$, in § 148 benutzt er die Regel $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$, um danach $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-4} = \sqrt{4} = 2$ zu errechnen. Dennoch hat auch *Euler* bei seinen Untersuchungen äußerst gewandt und erfolgreich mit komplexen Zahlen gerechnet.
(Die zitierten Stellen findet man in: Leonardi Euleri Opera omnia, Leipzig und Berlin 1911, Opera mathematica, Vol. I, S. 55 und 56.)

8) *G. W. Leibniz* (1646—1716); Opera omnia III, ed. L. Dutens, Genf 1768, S. 378. Dort heißt es: „Verum enim vero; tenacior est varietatis suae pulcherimae Natura rerum, aeternarum varietatum parens, vel potius Divina Mens, quam ut omnia sub unum genus compingi patiatur. Itaque elegans et mirabile effugium reperit in illo Analyseos miraculo, idealis mundi monstro, pene inter Ens et non-Ens Amphibio, quod radicem imaginariam appellamus.“ (Bei Leibniz keine Hervorhebungen.)

trat[9]). Man spricht deswegen seitdem von der Gesamtheit der komplexen Zahlen als der GAUSSschen Zahlen e b e n e, wobei nicht außer acht gelassen werden soll, daß gleichzeitig einige andere Mathematiker, die aber den Fortgang der Sache kaum beeinflußten, die gleichen Vorstellungen entwickelt hatten[10]).

Lassen Sie uns noch einen Augenblick bei dieser *geometrischen Darstellung* verweilen. Die komplexen Zahlen erscheinen dabei als die Punkte einer Ebene und demgemäß die mit ihnen auszuführenden Rechenoperationen wie Addition, Multiplikation usw. als wohlbestimmte geometrische Konstruktionen. In diesem Gewande sind die komplexen Zahlen sozusagen s i c h t b a r gemacht, die mit ihnen vorzunehmenden Rechnungen v i s u e l l k o n t r o l l i e r b a r geworden. Es scheint, daß sie durch diese Versinnlichung ihr undurchsichtiges „imaginäres" Wesen, das viele abschreckte, verloren und in der konkreten Gestalt an Vertrauenswürdigkeit außerordentlich gewannen.

Denn mit dieser geometrischen Interpretation war der Bann gebrochen, und nach einem runden Vierteljahrtausend des Zögerns und Zweifelns an den komplexen Zahlen begann ihr damals ungeahnter Siegeszug. Auf dem nun sicher gegründeten Boden erwuchsen vor allem die großen Entdekkungen der komplexen Funktionentheorie mit fruchtbarer Ausstrahlung auf die meisten anderen Gebiete der Mathematik, zum Beispiel der Zahlentheorie, alles in allem ein mitreißendes Vorwärtsstürmen, das dann in unserem Jahr-

---

[9]) *C. F. Gauß* (1777—1855) Theoria residuorum biquadratorum. Commentatio secunda, Göttingen 1831. Siehe Werke Bd. II, Göttingen 1876, Art. 31 f., insbesondere Art. 38 (Seite 102 bzw. 109 der zit. Ausgabe). Diese Abhandlung hat bahnbrechend gewirkt.

[10]) So *C. Wessel* (1745—1818) in „Om direktionens analytiske Betegning" (am 10. 3. 1797 der Dän. Kgl. Akademie der Wissenschaften vorgelegt) Danske Selsk. Skr. N. Sammlung V, 1799 und *J. R. Argand* (1768—1822) in „Essai sur une manière de représenter des quantités imaginaires", Paris 1806.

hundert einem ruhigen Auslauf zuzustreben schien, bis diese Entwicklung in allerletzter Zeit wieder im Zusammenwirken mit neuen geometrischen, nämlich topologischen Erkenntnissen in der Funktionentheorie m e h r e r e r Veränderlichen erneute Triumphe feierte.

Aber zurück zur Kernfrage! Was sind denn nun eigentlich diese einerseits so geheimnisvollen, andererseits so reicher Entfaltung fähigen mathematischen Gebilde? Lassen Sie uns Gauss befragen, der darüber seine Meinung folgendermaßen kundgetan hat[11]):

> „Der Mathematiker abstrahiert gänzlich von der Beschaffenheit der Gegenstände und dem Inhalt ihrer Relationen; er hat es bloß mit der Abzählung und Vergleichung der Relationen unter sich zu tun: insofern ist er ebenso, wie er den durch +1 und —1 bezeichneten Relationen, an sich betrachtet, Gleichartigkeit beilegt, solche auf alle vier Elemente +1, —1, +i und —i zu erstrecken befugt."

Achten Sie bitte bei dieser Äußerung besonders auf den ersten Satz. Obwohl Gauss doch selbst den komplexen Zahlen erst durch eine eindrucksvolle Konkretisierung zum Durchbruch verholfen hatte, ist ihm beim Blick auf das Wesentliche ganz klar, daß es auf diese konkrete Gestalt gar nicht ankommt, sondern eben auf etwas ganz anderes.
Es ist ja tatsächlich auch gar nicht die einzige Gestalt, in der uns die komplexen Zahlen entgegentreten. Sie können auch rein algebraisch auf verschiedene Arten dargestellt werden. Zum Beispiel lassen sie sich, für den Laien vielleicht sonderbar, aber in Wahrheit wiederum recht charakteristisch für die Denkweisen der modernen Mathematik, als gewisse Teilmengen, Restklassen genannt, in einem über den reellen Zahlen konstruierbaren sogenannten Polynombereich erklären. Dabei entspricht dann jeder einzelnen komplexen

---

[11]) *Gauß*, Anzeige zur Theoria residuorum biquadratorum, a. a. O., S. 176.

Zahl eine Menge von Dingen, eben von Polynomen, und die Rechenoperationen werden durch gewisse Verknüpfungen dieser Mengen dargestellt. Auf diese Weise nehmen die komplexen Zahlen natürlich ein ganz anderes Aussehen an, das übrigens in der Weiterentwicklung auch seine Bedeutung hatte.
Jetzt ist der Punkt gekommen, wo wir den Blick noch einmal zurücklenken sollten auf die projektive Geometrie. Auch diese ist nämlich verschiedener Einkleidungen fähig. Um das zu erkennen, wollen wir uns eines anderen für die moderne Mathematik kennzeichnenden Prinzips bedienen, nämlich des der *isomorphen Abbildung*. Erschrecken Sie bitte nicht, ich will es so einfach wie möglich beschreiben. Sie wissen alle, was eine photographische Abbildung ist. Diese bannt einen gewissen Ausschnitt des Raumes auf die Platte oder den Film, also auf eine Ebene. So betrachtet, ist das jedoch schon deswegen keine isomorphe Abbildung, weil von räumlichen Objekten, welche, von der Linse aus gesehen, hintereinander liegen, nur das nächste, vorderste auf der Platte sichtbar wird. Wenn man jedoch ein ebenes Flächenstück, etwa ein an der Wand hängendes Bild photographiert, so entsteht von diesem ein getreues Abbild, das als isomorph bezeichnet werden kann. Das gleiche gilt von räumlichen Modellen, wie sie manchmal von Neubaukomplexen, Stadtteilen usw. angefertigt werden. Allerdings ist der mathematische Begriff „isomorph" verschiedener Beziehungen fähig, die in jedem Einzelfall genau präzisiert werden müssen und die durch die eben gegebenen Andeutungen noch keineswegs erfaßt sind!
Aber es kommt noch etwas anderes hinzu. Bei der Photographie werden sichtbar Punkte in Punkte, Geraden in Geraden usw., also jedes Objekt in ein gleichartiges abgebildet. Das braucht bei einer im mathematischen Sinn isomorphen Abbildung keineswegs so zu sein. Es können vielmehr Men-

gen aus ganz verschiedenartigen Objekten aufeinander isomorph abbildbar sein. Das gerade ist für die folgende Betrachtung von besonderer Wichtigkeit.
Hierfür soll uns die projektive Geometrie erneut als Beispiel dienen. Sie läßt sich nämlich einschließlich ihrer sogenannten unendlich fernen Elemente isomorph auf einen Bereich geometrischer Objekte abbilden, den man sich ganz im Endlichen, Erreichbaren vorstellen kann. Ich will das nur für den Fall einer projektiven Ebene beschreiben.
Denken Sie sich einen Punkt im Raume fixiert und durch ihn alle Geraden und Ebenen gelegt. Die Gesamtheit dieser Geraden und Ebenen durch einen Punkt nennt der Mathematiker ein Bündel; solange er damit arbeitet und seine Aussagen darauf beschränkt, spricht er von der *Geometrie im Bündel.* Das sieht nun zunächst ganz anders aus als die projektive Ebene. Und doch ist es dasselbe. Um aber die projektive Ebene in der Gestalt des Bündels wiederzuerkennen, müssen Sie einen kühnen Gedankensprung wagen. Sie müssen erst die Namen der Dinge ändern. Die Geraden des betrachteten Bündels sollen fortan „Punkte" heißen, die Ebenen hingegen den Namen „Geraden" erhalten. Ihre Vorstellung davon sollen Sie aber nicht ändern, einerseits weil wir diese Vorstellung sogleich noch brauchen, andererseits weil Sie erkennen sollen, daß es auf diese Vorstellung gar nicht ankommt. Denn wir benutzen die alte Vorstellung noch zur Erklärung des Zusammenfallens oder der Inzidenz, wie man mathematisch sagt, von unseren neuen Punkten und Geraden. Wir setzen nämlich fest: Einer unserer neuen „Punkte", der in Wirklichkeit eine Gerade des Bündels ist, soll mit einer unserer neuen „Geraden", die in Wirklichkeit eine Ebene des Bündels ist, zusammenfallen oder inzidieren, wenn die bewußte Gerade des Bündels in die bezogene Ebene hineinfällt. In dieser neuen Nomenklatur stellt nun unser Bündel nichts anderes

dar als eine projektive Ebene, oder genauer gesagt, ist isomorph abgebildet auf eine projektive Ebene.
Wir sehen auf diese Weise die projektive Ebene in einer ganz neuen Gestalt, nämlich dargestellt durch die Geraden und Ebenen unseres Bündels. Um noch ein übriges zu tun, können Sie dieses Bündel einsperren in eine Kugel, welche Sie um den Kernpunkt des Bündels legen. Es macht gar nichts aus, wenn Sie die Geraden und Ebenen des Bündels auf ihre Teile im Innern der Kugel beschränken. Dann haben Sie ein Modell der projektiven Ebene erhalten, das ganz in einem beschränkten Raumstück liegt. Die unendlich fernen Elemente sind als solche verschwunden, sie sind nämlich ganz ins Endliche gerückt, ihre Ausnahmestellung ist beseitigt; sie sind damit den anderen, eigentlichen Elementen als völlig gleichartig und gleichwertig gegenübergestellt und von diesen gar nicht mehr zu unterscheiden. Gleichwohl gibt das neue Modell, eben die Geometrie im Bündel, die projektiven Verhältnisse ebenso gut und zutreffend wieder, wie das alte, d. i. die projektive Ebene selbst. Jede Aussage, die für das eine Modell richtig ist, kann sofort gültig auf das andere übertragen werden. Die Summe der Erkenntnisse, welche wir in dieser Hinsicht an der einen Darstellung gewinnen können, deckt sich völlig mit der, welche uns die andere darbietet. Das ist Isomorphie.

Welche Folgerungen können wir nunmehr aus der Tatsache ziehen, daß es möglich ist, einen bestimmten Inbegriff mathematischer Objekte in ganz verschiedenen Einkleidungen wiederzufinden? Nun eben die, daß es auf diese Einkleidung überhaupt nicht ankommt. Worin aber besteht dann die Wesenheit der mathematischen Objekte?
Sie müssen nicht glauben, daß den Mathematikern, historisch gesehen, die Antwort auf diese Frage leicht geworden wäre. Im Gegenteil! Jahrhunderte, um nicht zu sagen Jahr-

tausende haben sie darum gerungen. Viele Schwierigkeiten und Irrtümer in den bewegenden Fragen vergangener Zeiten, zum Beispiel auf der Suche nach einem Beweis von EUKLIDS berühmten Parallelenpostulat, sind darauf zurückzuführen, daß die Mathematiker früher keine Klarheit über diese Wesensfrage besaßen.

Die Einsicht, welche GAUSS in seiner Schrift über die komplexen Zahlen — Sie erinnern sich an das vorhin wiedergegebene Zitat! — bereits besaß, war damals in ihrer Tragweite noch keineswegs erkannt. Um so bemerkenswerter scheint mir, daß schon einige Jahrzehnte vorher ein anderer großer Denker für die euklidische Geometrie Leitsätze aussprach, die in dieselbe Richtung wiesen. Es war JOHANN HEINRICH LAMBERT, der bereits 1766 in seiner „Theorie der Parallellinien" schrieb:

> „Bei dieser Frage kann man nun von allem, was ich im Vorhergehenden Vorstellung der Sache genannt habe, abstrahieren. Und da Euklids Postulata und übrigen Grundsätze einmal mit Worten ausgedrückt sind, so kann und soll gefordert werden, daß man sich in dem Beweis nirgends auf die Sache selbst berufe, sondern den Beweis durchaus symbolisch vortrage — wenn er möglich ist. In dieser Absicht sind Euklids Postulata gleichsam wie ebenso viele algebraische Gleichungen, die man bereits vor sich hat, und aus welchen x, y, z etc. herausgebracht werden sollen, ohne daß man auf die Sache selbst zurücksehe. Da es aber nicht ganz solche Formeln sind, so kann man allerdings die Vorzeichnung einer Figur als einen Leitfaden, um den Beweis zu führen, dabei zugeben. . . ."[12])

---

[12]) *J. H. Lambert* (1728—1777), Theorie der Parallellinien, posthum im Magazin für die reine und angewandte Mathematik herausgegeben von *J. H. Bernoulli*, Leipzig, Jahrgang 1786. Einen unveränderten Nachdruck findet man bei *F. Engel* und *R. Stäckel*, Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der Nichteuklidischen Geometrie, Leipzig 1895. Vorst. Zit. s. dort S. 162.

Zwischen der Äußerung von LAMBERT und der von GAUSS lagen 65 Jahre, und noch ungefähr der gleiche Zeitraum sollte vergehen, bis diese Gedankengänge zu der vollen Klarheit gediehen, in der wir sie heute auffassen. Aber schon damals begann sich ihre fruchtbare, allmählich immer weiter um sich greifende Wirkung zu entfalten. Die Entwicklung war im Gange und sollte nicht mehr zum Stillstand kommen.

Denn die Erfahrung, daß ein mathematisches Gebilde (wie die projektive Ebene) oder eine mathematische Gesamtheit (wie die der komplexen Zahlen) in mannigfacher Realisierung, in ganz unterschiedlicher Einkleidung auftreten und betrachtet werden kann, machten die Mathematiker seitdem immer wieder. Und so festigte sich allmählich die Einsicht, daß in jedem solchen Falle das den verschiedenen Erscheinungen Gemeinsame einer von der besonderen Gestalt losgelösten, allgemeingültigen Darstellung fähig sein müßte. So war der *Gruppenbegriff* schon verschiedentlich in konkreter Gestalt aufgetreten, einmal in der Algebra in der Gleichungstheorie des jungen genialen GALOIS[13]), um 1832 weiter in der Zahlentheorie als Restklassengruppe (eigentlich schon bei GAUSS), ferner in der Geometrie als Transformationsgruppe, ohne daß man von Anfang an das Gemeinsame, Gleichartige daran erkannt hätte. Aber hier wurde das Wesentliche an dem nun fälligen Abstraktionsprozeß vielleicht zuerst erfaßt. Man sah, daß sich hierbei gewisse Operationen und Schlußweisen immer wiederholten und versuchte, dafür eine Form zu finden, die auf alle vorgekommenen Fälle paßte. Und das gelang!

In der Tat war damit eine neue Stufe der Abstraktion er-

[13]) *E. Galois* (1811—1832), vgl. hierzu *R. Bourgne* et *J.-P. Azra*, Ecrits et Mémoires mathématiques d'Evariste Galois. Edition critique intégrale de ses manuscrits et publications, Paris 1962.

klommen. Demjenigen, der die Geschichte der Mathematik kennt, wird der Gedanke nicht neu sein, daß alle begrifflichen Fortschritte der Mathematik, von den allerersten, die etwa mit der Bildung des Zahlbegriffs anfangen, bis zu den subtilsten in unserem Zeitalter, mit einer Steigerung der Abstraktion verbunden sind, ja oft entscheidend davon abhängen. So entstand in unserem vorerwähnten Fall die abstrakte Gruppentheorie. Sie war insofern besonders geeignet und berufen, bei der Entwicklung der *modernen Axiomatik* den Anfang zu machen, als man bei ihr mit einigen ganz wenigen, formelmäßig leicht faßbaren Axiomen auskommt.

Eine ungleich schwierigere Aufgabe war trotz gleichartiger Problematik in der Analysis und der Geometrie gestellt, deren Lösung, zumal in der letzteren, immer brennender wurde. Während es nämlich in der Analysis zunächst das Bedürfnis nach strenger Grundlegung des Grenzwertbegriffs und der Grenzprozesse war, welches seit CAUCHY's[14]) unerbittlicher Kritik und erstem kräftigen Zugriff nach Befriedigung drängte, und diese besonders durch DEDEKINDS[15]) Eingreifen auch fand, war die Lage in der Geometrie viel verwickelter. Hier hatte die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrien die Gemüter in starke Wallung gebracht, war wenig später die Zwangsjacke der Dreidimensionalität des Raumes gesprengt worden[16]), hatte ferner RIEMANNS genialer Entwurf über „Die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" die geometrischen Grundbegriffe weittragend erweitert, aber auch mächtig an ihnen gerüt-

---

14) *A. Cauchy* (1789—1857). Näheres s. *N. Bourbaki*, Eléments d'histoire des mathématiques. Paris 1960 und *F. Klein*, Vorles. über d. Entw. d. Mathem. im 19. Jh., eine biographische Abhandlung gibt *C. A. Valson*, Paris 1868.

15) *J. W. R. Dedekind* (1831—1916), Stetigkeit und irrationale Zahlen, 3. Auflage Braunschweig 1905.

16) Wohl zuerst entscheidend bei *H. Grassmann* (1809—1877), Ausdehnungslehre, Leipzig 1844.

telt[17]). Das kritisch geschärfte Gewissen der Zeit stellte immer vernehmlicher die Frage nach der Möglichkeit einer neuen Konzeption der Grundlagen der Geometrie und erheischte gebieterisch Antwort.

Und diese Antwort wurde gegeben — wurde gegeben durch eine Tat! Denn sie war nicht allein durch Worte zu erbringen. Das Ziel war ja schon gewiesen, aber der Weg dahin mußte noch gebahnt werden. Und das wurde geleistet durch HILBERTS unvergängliches Werk, voran durch seine *Neubegründung der Geometrie*[18]). Sie war die entscheidende Siegestat über eine Menge von Schwierigkeiten und Vorurteilen, eine geistige Großtat, welche trotz ihres damaligen speziellen Zweckes durch die Allgemeingültigkeit ihrer Methoden und Denkweisen der modernen Axiomatik die Tore zu allen Zweigen der Mathematik öffnete. Sie wurde zum großen Vorbild für jegliche axiomatische Grundlegung einer mathematischen Theorie, für jede Axiomatisierung eines mathematischen Stoffes, deren sie zahllose im Gefolge nach sich zog.

Wer die Größe und Bedeutung dieser Leistung voll ermessen will, muß sich eingehender mit ihren Einzelheiten befassen. Aber die Wesenszüge der neuen grundlegenden Denkweise lassen sich vielleicht an Hand der vorangegangenen Ausführungen kurz umreißen.

Sie erinnern sich, daß wir ein Modell der projektiven Geometrie beschrieben haben, dessen Punkte nicht mehr Punkte im gewöhnlichen Sinn und dessen Geraden nicht gewöhnliche Geraden waren. Derartige Modelle lassen sich natür-

---

17) *B. Riemann* (1826—1866), Habilitationsvortrag vom 10. 6. 1854, erstmalig herausgegeben in Bd. 13 der Abhandlungen d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Besonders zu empfehlen ist die von *H. Weyl* erläuterte Ausgabe bei J. Springer, Berlin 1919.

18) *D. Hilbert* (1862—1943), Grundlagen der Geometrie, aus: Festschrift zur Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals in Göttingen, Leipzig 1899, 9. Auflage Stuttgart 1962.

lich auch für die euklidische Geometrie konstruieren. Dadurch werden die Definitionen EUKLIDS wie „Ein Punkt ist was keine Teile hat; eine Gerade breitenlose Länge", Definitionen also, die auf eine Wesensbeschreibung der betrachteten Objekte hinzielen, als bedeutungslos für die logische Gültigkeit der geometrischen Sätze dargetan. Aber worauf bezieht sich dann der Inhalt mathematischer Aussagen, und was können wir damit erreichen? Hierauf gab HENRI POINCARÉ die präzise Antwort[19]):

> „Was die Wissenschaft erreichen kann, sind nicht die Dinge selbst, sondern es sind einzig die Beziehungen zwischen den Dingen; außerhalb dieser Beziehungen gibt es keine erkennbare Wirklichkeit."[20])

Dieser Standpunkt ist in HILBERTS Begründung der Geometrie aufs überzeugendste verwirklicht. Von Anfang an wird bewußt und ausdrücklich auf jede inhaltliche Bedeutung der Worte Punkt, Gerade, Ebene usw. verzichtet. Diese sind vielmehr nur Namen für Elemente, über deren Wesenheit, Gestalt, Aussehen wir nichts zu wissen brauchen. Sie müssen nur voneinander, etwa durch Zuordnen von Zeichen, unterscheidbar sein. Natürlich können wir auch diese Zeichen selbst darunter verstehen. Worauf es nur entscheidend ankommt, sind die Beziehungen zwischen diesen Elementen.

Einige solche Beziehungen, die sich als grundlegend erwiesen haben, werden ausgewählt und an die Spitze gestellt; diese heißen Axiome. Dann beginnt das Spiel unserer Logik, die aus diesen Grundbeziehungen, den Axiomen, neue

---

19) *H. Poincaré* (1854—1912), La Science et l'hypothese, Paris 1902; zitiert aus der von *F.* und *L. Lindemann* übersetzten deutschen Ausgabe, Nachdruck der 3. Auflage, Leipzig 1928, S. XVI.

20) Man wird hier an *Kants* berühmte Konzeption des „Dinges an sich" und seine prinzipielle Unerkennbarkeit erinnert. Aber hier kommt es wesentlich auf die Beziehungen zwischen den Dingen an, soweit sie von unserem geistigen Auge erfaßt werden können.

Beziehungen herleitet, neue Begriffe durch Definitionen aufstellt und darüber weitere Aussagen durch schlüssige Beweise gewinnt. So entsteht auf den Axiomen als den Fundamenten das Gebäude der mathematischen Erkenntnis.

Aber was hat diese Erkenntnis noch mit der Wirklichkeit zu tun, wenn aus ihr das Anschauliche ganz verbannt ist? Nun, die Anschauung, an der wir ja unsere Begriffswelt letzten Endes geformt haben und von der dieser immer wieder neue Anregungen zuströmen, ist nur vorübergehend zurückgedrängt um der logischen Klarheit und Allgemeingültigkeit willen. Der geschichtliche Verlauf hatte doch bewiesen, daß eine allzu enge Bindung des mathematischen Denkens an die Anschauung unsere Erkenntnis so sehr trüben und behindern kann, daß dadurch die notwendige Einsicht in den logischen Hintergrund nahezu unmöglich gemacht wird. Der immer noch hörbare Ruf, die Anwendung abstrakter Methoden durch anschauliche Schlußweisen zu ersetzen, bedeutet etwa dasselbe wie die Forderung, man sollte auf die allgemeinen Begriffe und Methoden der Infinitesimalrechnung verzichten und wieder zurückkehren zu dem Stand vor Newton und Leibniz; oder noch anders, in einem allgemeinverständlichen Bild ausgedrückt: Die Ablehnung der abstrakten Axiomatik wäre vergleichbar dem Verlangen, daß man in der heutigen industriellen Fertigung den Gebrauch moderner Maschinen verbieten und nur die Werkzeuge unserer Vorfahren zulassen solle.
Wir können der Hilfsmittel der modernen Axiomatik auch gar nicht mehr entraten. Denn ohne ihre durchgreifende Wirksamkeit würde die heutige Mathematik ein unübersehbarer Haufen von Einzeltatsachen und Theorien sein, deren gemeinsame Kristallisationspunkte gar nicht sichtbar wären. Mit ihrer, der Axiomatik, Hilfe aber gewinnen wir neue zentrale Standpunkte, von denen aus wir weitver-

zweigte mathematische Gebiete überblicken und mit der richtigen Übung auch beherrschen können.
Hat nämlich der logische Formalismus seine Arbeit getan, ist erst die abstrakte mathematische Struktur errichtet, dann wartet sie begierig auf die Bekleidung mit einer passenden Außen- und Inneneinrichtung, die von Fall zu Fall wechseln kann und bei derselben mathematischen Struktur sehr verschiedenartiger Formen fähig ist. In dieser Allgemeingültigkeit der abstrakten Struktur, in ihrer Anpassungsfähigkeit, in ihrer dadurch bedingten vielfältigen Anwendbarkeit liegt ihr großer Vorteil und eine erstaunliche Zeugungskraft. Dies wird belegt durch zahllose Beispiele, die sich ständig mehren. Sie reichen vom fruchtbaren Gebrauch in der Mathematik selbst bis zu vielfachen Anwendungen in allen Nachbarwissenschaften und in der Technik.

So sehen wir, wie aus dem Keime, der ganz im Innern des Geistigen ruht, ein wahrer Kosmos erwächst, für den, der in ihn Einlaß gefunden hat, immer wieder überwältigend in seiner Größe, begeisternd durch seine Schönheit, beglückend durch die Fülle und Kraft seiner Ideen!