KARLSRUHER AKADEMISCHE REDEN

NEUE FOLGE / NR. 20

KARLSRUHER AKADEMISCHE REDEN
NEUE FOLGE / NR. 20

Professor Dr. rer. nat. J. WEISSINGER

WESENSZÜGE DES MATHEMATISCHEN DENKENS

VORTRAG
GEHALTEN BEI DER JAHRESFEIER
AM 2. DEZEMBER 1961

VERLAG C. F. MÜLLER KARLSRUHE
1962

„Der gute Christ soll sich hüten vor den Mathematikern und all denen, die frevlerisch Vorhersagen zu machen pflegen, besonders dann, wenn sie die Wahrheit sagen. Es besteht nämlich die Gefahr, daß diese Leute mit dem Teufel im Bund den Geist trüben und den Menschen in Höllenbande verstricken." Diese den modernen Menschen zunächst verblüffende Mahnung Augustins [1] gewinnt in unserem Jahrhundert eine bestürzende Aktualität, und zwar gerade in dem besonders paradox anmutenden Zusatz „maxime dicentes vera". Ob die Scharlatanerien und Pseudowissenschaften früherer Zeiten der Menschheit nicht vielleicht zuträglicher waren als die vera dicentes Naturwissenschaften unseres Jahrhunderts, muß die Zukunft erweisen.

Sie kennen aber auch den Spruch über der platonischen Akademie:

μηδεῖς ἀγεωμετρητὸς εἰσίτω

(in modernem Amtsdeutsch: Zutritt für Nichtmathematiker verboten!).

An dieser extremen Unter- bzw. Überbewertung der Mathematik hat sich bis heute nicht viel geändert. Neu ist vielleicht nur, daß beide Einstellungen derselben Quelle entspringen: vollständiger Unkenntnis dessen, worum es in der Mathematik eigentlich geht. Das ist um so erstaunlicher, als die platonische Inschrift auch heute noch unsichtbar über dem Eingang zu unseren Hohen Schulen oder mit der Abwandlung

μηδεῖς ἀγεωμετρητὸς ἐξίτω

über dem Ausgang unserer Gymnasien steht. Das Phänomen hat viele Gründe: einer besteht darin, daß – um im Bilde zu bleiben – nicht nur das Hauptportal sehr verbreitert worden ist, sondern daß darüber hinaus zahlreiche Seiten-, um nicht zu sagen Hintertüren geschaffen wurden und geschaffen werden.

Diese weit verbreitete Unkenntnis und die damit verbundene, häufig auf Schultraumata zurückgehende Abwehrhaltung gegenüber allem Mathematischen machen es schwer, außerhalb von Fachveranstaltungen über Mathematik zu sprechen.

Eine weitere Schwierigkeit liegt in der Person des Vortragenden. Ein Mathematiker wird dazu erzogen, nur klar definierte Begriffe zu benutzen

1 De genesi ad litteram, 2, XVII, 37. (Quapropter bono christiano, sive mathematici, sive quilibet impie divinantium, maxime dicentes vera, cavendi sunt, ne consortio daemoniorum animam deceptam, pacto quodam societatis irretiant).

und nur Behauptungen auszusprechen, die ohne Zusätze oder Abstriche, ohne Deutelei und nachträgliche Interpretationskünste beweisbar sind. Hierin ist die Erziehung so streng, daß ein Mathematiker nur unter Entwicklung heftigster Schuldgefühle gegen diese Gebote verstoßen kann. Gerade das aber muß ich tun, wenn ich in einer allgemein verständlichen Sprache über mathematische Probleme reden will. Denn der Wert unserer natürlichen Sprache, das was sie zu einem so erfolgreichen Instrument der Mitteilung und zu einem so subtilen Mittel der Kunst macht, beruht zu einem großen Teil auf ihrer Mehrdeutigkeit, ihrer Fähigkeit, Ausgesprochenes nicht vollständig zu fixieren, sondern in der Schwebe zu lassen. Wenn ich mich also anschicke, in der Umgangssprache über Mathematik zu sprechen, so muß ich die Fachgenossen für viele Ungenauigkeiten um Nachsicht bitten, meine übrigen Hörer aber um Vorsicht beim Ziehen eigener Schlußfolgerungen aus meinen stark vereinfachenden und manchmal unscharfen Ausführungen.

Im ersten Teil meines Vortrages wird mehr von der reinen Mathematik die Rede sein, weil über sie vielleicht besonders falsche Vorstellungen verbreitet sind, während im zweiten Teil die Anwendungen stärker in den Vordergrund treten. Ich möchte aber betonen, daß die Grenze zwischen reiner und angewandter Mathematik fließend und letztlich unnatürlich ist. Das erkennt man am besten daran, daß die größten Mathematiker zu allen Zeiten sich in beiden Richtungen betätigt haben: *Archimedes,* dem nicht nur die Mathematik, sondern auch die Mechanik, ja die Technik entscheidende Fortschritte verdankt; *Pascal* und *Leibniz,* die neben ihren rein mathematischen Theorien Rechenmaschinen konstruierten, deren Prinzipien heute noch verwendet werden; *Gauss,* der in einem so anwendungsfremden Gebiet wie der Zahlentheorie großartige Ergebnisse erzielte, andererseits der angewandten Mathematik das grundlegende „Verfahren der kleinsten Quadrate" schenkte und der Statistik fundamentale Ideen beisteuerte; schließlich in neuerer Zeit der 1943 verstorbene David *Hilbert,* der u. a. auf den von Gauss gelegten Fundamenten der Zahlentheorie eines der schönsten und großartigsten Gedankengebäude der Mathematik errichtete, aber auch der theoretischen Physik einen großen Teil seiner Arbeitskraft widmete; endlich der 1957 verstorbene John v. *Neumann,* dem einerseits die außerordentlich abstrakte Theorie der linearen Räume entscheidende Fortschritte verdankt, der aber mindestens gleich große Verdienste an der Entwicklung der modernen Rechenautomaten hat, wichtige Beiträge zur theoretischen Gasdynamik leistete und mit seiner Theorie der Spiele einen völlig neuen Zugang zu Problemen der Nationalökonomie erschloß. Diese Namensliste ließe sich noch weiter fortsetzen; um nur einige der Größten wenigstens zu nennen: Newton, Euler, Lagrange, Riemann.

Eine allgemein akzeptierte Definition dessen, was Mathematik sei, gibt es nicht; sie ist vielleicht nicht einmal wünschenswert, weil sie dogmatisch den lebendigen Wandel und Fortschritt hemmen könnte. Im Grunde helfen solche Definitionen auch nicht allzu viel zum Verständnis, weil die darin auftretenden Begriffe ihrerseits wieder der Definition bedürfen. Immerhin möchte ich betonen, daß Definitionen wie „Mathematik sei die Lehre von Zahl und Raum" oder „vom Zähl- und Meßbaren" oder „vom Quantitativen" zu eng sind. Am besten ist wohl die Definition: Mathematik ist die Lehre von den Strukturen. Was damit gemeint ist, wird im folgenden an einigen Beispielen klarer hervortreten.

Sehr häufig wird man als Mathematiker gefragt: „Gibt es denn immer noch etwas Neues zu berechnen?" Diese Frage beruht auf einem doppelten Irrtum, nämlich der Meinung, daß die Tätigkeit des Mathematikers im Rechnen oder Berechnen bestehe, und zweitens daß die Mathematik irgendwann einmal alle Probleme gelöst haben werde. Große Bereiche der Mathematik haben mit Zahlen gar nichts zu tun, und wenn der Mathematiker sich mit Zahlen beschäftigt, dann im allgemeinen nicht auf rechnende Weise. Lassen Sie mich das an einem Beispiel zeigen, das ganz elementar und überdies in Frage und Antwort über zwei Jahrtausende alt ist.

Bekanntlich heißt eine natürliche Zahl eine Primzahl, wenn sie nur durch sich selbst und durch 1 teilbar ist, also keinen echten Teiler besitzt. Eine Nicht-Primzahl läßt sich als ein Produkt von Primzahlen darstellen, z. B. $12 = 2 \times 2 \times 3$. Die Reihe der Primzahlen beginnt mit 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 usw. Man stellt nun beim Durchmustern der Zahlen fest, daß die Primzahlen mit wachsender Größe immer seltener werden, und der Verdacht liegt nahe, daß es oberhalb einer genügend großen Zahl überhaupt keine Primzahlen mehr gibt, daß also nur endlich viele Primzahlen existieren. Euklid gelang es, diese Vermutung zu widerlegen: Gäbe es nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$, so würde die Zahl $q = 1 + p_1 p_2 \ldots p_n$ bei Division durch diese Primzahlen stets den Rest 1 lassen, wäre also durch keine dieser Primzahlen teilbar. Nach dem eben Gesagten müßte sie also entweder durch andere Primzahlen teilbar sein oder sie wäre selbst eine – sichtlich von $p_1, p_2, \ldots, p_n$ verschiedene – Primzahl. Die Annahme, daß es nur endlich viele Primzahlen gibt, ist damit widerlegt. Dieser einfache Gedankengang hat die Mathematiker von jeher durch seine Schönheit bezaubert.

Wir wollen das Primzahlproblem noch ein Stück weiter verfolgen. Nachdem man weiß, daß die Reihe der Primzahlen niemals abbricht und andererseits Erfahrung und Intuition einem sagen, daß die Primzahlen in der Reihe aller Zahlen immer seltener werden, erwacht der Wunsch, dieses „seltener werden“ präziser zu erfassen. Man muß also zunächst einen passenden Dichtebegriff erfinden und dann diese Dichte berechnen. Das gelingt, indem man eine Funktion bildet, die von allen Primzahlen abhängt, die Riemannsche ζ-Funktion, und ihr Verhalten studiert. Die ζ-Funktion hat aber aus vielen Gründen Interesse und wird daher zu einem eigenen Studienobjekt. Z. B. bemühen sich die hervorragendsten Mathematiker seit etwa 100 Jahren, die sogenannte Riemannsche Vermutung zu beweisen, die sich auf die Lage der Nullstellen dieser Funktion bezieht, bisher ohne Erfolg. Schließlich läßt sich das Grundprinzip, nach dem die ζ-Funktion gebildet wurde, in vieler Hinsicht verallgemeinern. So ist aus unserer einfachen Euklidischen Fragestellung ein riesiges und bis heute nicht abgeschlossenes Teilgebiet der Mathematik geworden.

Ich glaube, schon dieses einfache Beispiel zeigt, wie töricht die erwähnte Frage war. Sie haben gesehen, daß es sich bei diesen Untersuchungen nicht um ein Berechnen und auch nicht um ein Rechnen im üblichen Sinne handelt, sondern vielmehr um das Aufdecken struktureller Zusammenhänge in der Reihe der natürlichen Zahlen, und wie bereits in diesem kleinen Teilgebiet ein Ende des Fragenkönnens überhaupt nicht abzusehen ist. Merkwürdigerweise wundern sich dieselben Leute, die sich die Unbegrenztheit der Mathematik so schwer vorstellen können, nicht im mindestens darüber, daß die Kompositionsmöglichkeiten für Klavier noch keineswegs erschöpft sind, obwohl doch die wenigen Töne des Klaviers an Umfang gar nicht vergleichbar sind mit der Vielfalt der Begriffe, mit denen der Mathematiker komponieren kann.

Der Vergleich des schöpferischen Mathematikers mit dem Komponisten ist nicht von ungefähr gebraucht worden, wird doch die Mathematik von den meisten Mathematikern mindestens so sehr als Wissenschaft wie als Kunst empfunden. So hat der bekannte Hamburger Mathematiker H. *Hasse*[2] seiner Antrittsvorlesung, in der er seinen Hörern etwas von dem „wahren Wesen der Mathematik“ vermitteln wollte, den Titel gegeben: „Mathematik als Wissenschaft, Kunst und Macht“. Wir wollen uns nur mit den beiden ersten Aspekten befassen.

Die Mathematik gilt allgemein als die Wissenschaft, in der am klarsten zwischen richtig und falsch unterschieden werden kann. Weniger bekannt ist,

2 H. Hasse, Mathematik als Wissenschaft, Kunst und Macht. Baden-Baden 1952.

daß die Kriterien der Richtigkeit, also die Vorschriften, welche Beweismittel zulässig sind und welche nicht, sich im Laufe der Zeit geändert und zwar verschärft haben. Aber das sind Feinheiten, auf die hier nicht eingegangen werden kann. Jedenfalls hat der Laie durchaus recht mit seiner Meinung, daß in keiner anderen Wissenschaft das Urteil über richtig und falsch so klar und unerbittlich ist. Darin, daß man weder sich noch einem anderen etwas vormachen kann, liegt ein bedeutender Erziehungsfaktor der Mathematik. Aber der Laie irrt, wenn er meint, daß die Frage nach richtig oder falsch der einzige oder auch nur der wesentliche Maßstab für die Beurteilung einer mathematischen Arbeit sei. Die Richtigkeit ist eine notwendige Bedingung, deren Erfüllung als selbstverständlich vorausgesetzt wird. Die wesentlichen Beurteilungsmaßstäbe sind ästhetischer Natur.

Systematische Untersuchungen über eine Ästhetik der Mathematik sind mir nicht bekannt. Doch gibt es nur wenige Mathematiker, die sich nicht irgendwann einmal zu diesem Fragenkreis geäußert haben, besonders ausführlich Hasse in dem erwähnten Vortrag und *Hardy* in seinem Büchlein „A Mathematician's Apology“ [3]. Hasse, der immer wieder auf die Analogien zu der Musik hinweist, spricht von einer Schönheit im Kleinen und im Großen und unterscheidet dabei 3 Stufen. Auf der untersten, gewissermaßen atomaren Stufe steht die Forderung, daß die einzelnen Formeln oder die Formulierung einer einzelnen mathematischen Aussage in Worten klar, übersichtlich und prägnant sein sollen. Für den Sachverhalt ist es belanglos, wie die in einer Formel auftretenden Größen bezeichnet werden; für die Einheit von Inhalt und Form, die ein wichtiges Kriterium der Schönheit ist, kann das entscheidend sein. Auch die drucktechnische Wiedergabe, das Satzbild, soll ein Abbild des mathematischen Gedankens sein. Auf die analogen Verhältnisse in der Poesie möchte ich nur hinweisen; Sie wissen, welche Wichtigkeit zwei sonst so verschiedene Dichter wie Arno Holz und Stefan George dem optischen Eindruck ihrer Gedichte zumaßen.

Auf der zweiten Stufe der Schönheitskriterien stehen nach Hasse die Forderungen nach Eleganz und nach Zielstrebigkeit. Die letzte bedeutet, daß man an jeder Stelle eines Beweises weiß, wo man steht, und das Ziel vor Augen sieht. Das Gegenteil eines solchen Beweises ist der sogenannte „Mausefallenbeweis“. Man tastet sich Schluß für Schluß vorwärts und mit einem Mal fällt die Klappe zu: Man kommt sich überrumpelt und außerordentlich dumm vor; aber so viel man auch an den Gitterstäben der logischen Schlüsse zu nagen sucht, man ist gefangen, der Beweis ist lückenlos richtig.

---

3 Cambridge 1948.

Als höchste Stufe nennt Hasse „die Schönheit einer ganzen Theorie, deren einzelne Bestandteile (Ausgangspunkt, Fragestellung, grundlegende Definitionen, vorbereitende Sätze und Hauptsätze nebst ihren Beweisen) durch die Klarheit ihrer Formulierungen, durch ihre gegenseitigen Beziehungen, durch ihre Tragweite, ihre Zielstrebigkeit, durch die Wucht ihrer Überzeugungskraft und durch ihre Verallgemeinerungsfähigkeit einen lebendigen harmonischen Organismus bilden". Ein weiteres, von Hasse nicht genanntes ästhetisches Kriterium ist die „Einheit des Stiles", nämlich des Denkstiles, der Methodik. Danach soll z. B. eine algebraische Frage nur mit Methoden der Algebra und nicht etwa unter Zuhilfenahme von funktionentheoretischen Hilfsmitteln behandelt werden. Aber wie in der Kunst ist auch in der Mathematik diese Forderung nach Stilreinheit keineswegs allgemein anerkannt.

Sie werden bemerkt haben, daß einige der von Hasse angeführten Kriterien keinen rein ästhetischen Charakter haben, z. B. die Forderung der Verallgemeinerungsfähigkeit einer Theorie. Der Begriff der Tragweite erinnert an den häufig gebrauchten Vergleich einer mathematischen Theorie mit einem Werk der Architektur, in dem die tragenden Elemente ja ebenfalls nicht nur eine ästhetische Funktion haben. Aber es kann nicht meine Aufgabe sein, einen vollständigen Katalog mathematischer Wertkriterien zu entwickeln. Ich wollte nur bewußt machen, daß es außer „richtig und falsch" und – um auch das hinzuzufügen – außer „nützlich und unnütz" andere Kriterien zur Beurteilung des mathematischen Wertes gibt.

Nachdem wir bis hierhin vom fertigen mathematischen Werk gesprochen haben, wollen wir jetzt noch einiges über seine Hervorbringung sagen. Nichts ist falscher als die gemeinhin anzutreffende Vorstellung, daß der Mathematiker, geleitet vom nüchternen Verstand, Schritt für Schritt der Kette der logischen Schlüsse folgend geradlinig auf sein Ziel, den zu beweisenden Satz, losgeht. Ganz abgesehen davon, daß die große mathematische Leistung bereits im Aufwerfen einer Frage bestehen kann, und daß diese in dem genannten Bild als gegeben vorausgesetzt wird, so ist die ganze Vorstellung falsch. Nur ganz selten nämlich gelingt es, sich dem Ziel im direkten Anlauf zu nähern. Wenn der mißlungen ist, wird man vielleicht das Ziel abändern, zunächst eine speziellere Aufgabe oder sogar nur spezielle Beispiele betrachten, vielleicht aber auch eine allgemeinere oder eine ähnliche oder eine irgendwie mit der ursprünglichen zusammenhängende Aufgabe studieren. Die terra incognita wird so mit einem Netz von Wegen und gut ausgebauten Stützpunkten überzogen, die teilweise verbunden, teilweise aber auch völlig isoliert sind, z. B. wenn man von einer noch gar nicht bewiesenen Voraussetzung ausgehend ein Stück weiter gefolgert hat. Auf diese Weise kann man in geduldiger Arbeit das Ziel ein- und umkreisen und es schließlich erreichen; häufiger aber geschieht es, daß sich das noch unvollständige Netz in einem Augenblick der Intuition schlagartig zusammenschließt, und die Aufgabe damit im wesentlichen gelöst ist. Das weitere ist dann Routinearbeit. Jedes Verbindungsstück muß auf seine Festigkeit, das heißt auf seine logische Richtigkeit nachgeprüft werden; man versucht, Umwege abzukürzen, vielleicht auch – um vollständige Sicherheit gegen Irrtümer zu gewinnen – das Ziel noch auf einem zweiten Weg zu erreichen und dergleichen mehr. Es kann sein, daß bei diesem Um- und Ausbau der Beweis sich so verändert, daß die schließliche Publikation überhaupt nicht mehr erkennen läßt, wie er gefunden wurde.

Einen aufschlußreichen Einblick in die Psychologie des mathematischen Schaffens gibt ein Vortrag des Mathematikers Poincaré [4], in dem er seine Entdeckung der Theorie der Fuchsschen Gruppen und Funktionen schildert und insbesondere auf die Rolle des Unterbewußtseins bei dieser Entdeckung eingeht. Nachdem er zunächst 14 Tage vergeblich einen Satz zu beweisen versucht hatte, der sich später als falsch herausstellte, erzielte er ein gewisses Teilresultat. Dann heißt es wörtlich weiter: „Gerade zu dieser Zeit verließ ich Caen, wo ich mich damals aufhielt, um auf eine geologische Exkursion zu gehen, die von der Bergakademie veranstaltet wurde. Die Aufregungen der Reise ließen mich meine mathematische Arbeit vollständig vergessen. In Coutances angekommen, bestiegen wir zur Weiterfahrt einen Omnibus. In dem Augenblick, als ich meinen Fuß auf das Trittbrett setzte, kam mir die Idee – und zwar ohne daß irgend etwas in meinen früheren Gedanken ihr den Weg gebahnt zu haben schien –, daß meine zur Definition der Fuchsschen Funktionen benutzten Transformationen mit denen der nichteuklidischen Geometrie identisch seien. Ich verifizierte die Idee nicht; ich hätte nicht einmal die Zeit dazu gehabt, da ich nach Einnahme meines Platzes im Omnibus eine vorher begonnene Konversation fortsetzte; aber ich hatte das Gefühl völliger Gewißheit. Nach Caen zurückgekehrt verifizierte ich das Resultat in einer Mußestunde.“ Noch zweimal wiederholte sich derselbe Ablauf von geistiger Anstrengung, schöpferischer Pause und des unerwarteten, plötzlichen Auftauchens der Lösung. Poincaré bemerkt dazu: „Höchst eindrucksvoll ist dieses Phänomen der plötzlichen Erleuchtung, ein deutlicher Beweis dafür, daß eine lange, unbewußte Arbeit vorhergegangen ist. Daß das Unterbewußtsein bei mathematischen Entdeckungen eine bedeutende Rolle spielt,

4 J. Hadamard, An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field. Dover Publications 1954.

scheint mir unbestreitbar zu sein." Ähnliche Zeugnisse gibt es von anderen Mathematikern, aber auch von Musikern und Dichtern.

Bleibt also in der Mathematik wie in der Kunst der wesentliche Teil der Schöpfung ein Geheimnis, dem wir zwar Namen wie Intuition, Phantasie u. dgl. geben können, das aber unergründet und daher nicht lehrbar oder lernbar ist, so gibt es andererseits in der Mathematik und in der Kunst gewisse Regeln, deren Beachtung die Arbeit sehr erleichtern und fördern kann. Über diese in der Mathematik „Heuristik" genannte Kunst des Findens einer Lösung hat der Mathematiker Georg *Polya* ein Büchlein unter dem Titel „How to solve it" [5] geschrieben, das auch für Nichtmathematiker eine verständliche, anregende und nützliche Lektüre darstellt.

Einige seiner Regeln und Ratschläge für das heuristische Stadium des Denkprozesses, in dem man an die Vorschriften mathematischer Strenge noch nicht gebunden ist, sondern wo der Erfolg die Mittel rechtfertigt, habe ich oben schon angeführt. Alle diese heuristischen Regeln sind überdies zugleich Regeln für eine sinnvolle und vernünftige Lektüre mathematischer Arbeiten und Bücher. Wirklich verstanden hat man eine Theorie nicht schon, wenn man ihre Richtigkeit nachgeprüft hat, sondern erst dann, wenn man herausgebracht hat, wie der Autor darauf kam – oder wenigstens hätte kommen können, also wenn man das Gefühl hat: eigentlich hätte ich das auch machen können.

Nach diesem Exkurs über mathematische Wertmaßstäbe und den mathematischen Schaffensprozeß lassen Sie uns noch einmal zu der Frage zurückkehren, was Mathematik sei, oder besser: was für sie charakteristisch sei. Das am meisten in die Augen fallende Merkmal der modernen Mathematik ist der hohe Grad der Abstraktion, den sie erreicht hat oder doch anstrebt, und der in seiner äußersten Konsequenz sogar manchen Mathematikern zu weit geht. Ich habe mit Absicht vom „Grad" der Abstraktion gesprochen, denn „Abstrakt" ist kein absoluter Begriff. Abstrahieren bedeutet ja, daß man von gewissen Unterschieden absieht und damit Dinge, die eigentlich verschiedenartig sind, als gleichartig behandelt, so daß man zu Aussagen von weitreichender Gültigkeit gelangt. Man kann z. B. an so verschiedenen Dingen wie dem Kapital auf einer Bank, einer bestimmten Menge radioaktiver Substanz oder der Population einer bestimmten Pflanzen- oder Tierart die Vermehrung (die per definitionem auch eine Abnahme sein darf) betrachten. Man stellt dann fest, daß unter bestimmten Umständen, nämlich solange

5 In deutscher Übersetzung: „Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme", Sammlung Dalp, Bd. 36, Francke-Verlag Berlin.

nicht störende Umweltfaktoren wirksam werden, die Zuwachsrate in der Zeiteinheit proportional der vorhandenen Menge ist. Dieses Gesetz drückt sich in mathematischer Sprache durch eine Differentialgleichung aus. Die – sehr einfache – Theorie dieser *einen* Differentialgleichung ist also zugleich eine Theorie aller der verschiedenen Wachstumsprozesse und vieler anderer nicht genannter.

Beruht so die mathematische Erfassung der Natur auf Abstraktion, so setzt sich dieser Abstraktionsprozeß auch innerhalb der Mathematik fort, indem aus den ersten, verhältnismäßig engen Begriffen immer allgemeinere gebildet werden. Ein wichtiges Hilfsmittel ist dabei die axiomatische Methode, deren durchgängige Verwendung ein weiteres Kennzeichen der modernen Mathematik ist.

Im Grunde kennen Sie das axiomatische Vorgehen bereits von der Schule her, wo Sie die auf die Euklidischen Axiome gegründete Geometrie kennengelernt haben. Sie erinnern sich, daß man die geometrischen Sätze allein mittels dieser Axiome und der logischen Schlußregeln beweisen muß, ohne auf andere Hilfsmittel – etwa die Anschauung – zurückzugreifen. Insofern ist also die axiomatische Methode uralt. Neu ist in erster Linie die Interpretation dessen, was man da tut. Während früher die Ansicht herrschte, daß die Axiome der Ausdruck letzter, auf nichts weiter zurückführbarer Evidenzerlebnisse seien und entsprechend die Definitionen auf gewisse ganz ursprüngliche Anschauungen zurückgingen, neigt man heute zu der Auffassung, daß eine solche inhaltliche Interpretation unklar und vieldeutig, vor allem aber überflüssig ist, weil sie für den eigentlichen Zweck der Axiome, das Beweisen von Sätzen, gar nicht gebraucht wird. Bei ehrlicher Selbstprüfung wird man gestehen müssen, daß z. B. die Euklidische Definition „eine Gerade ist eine Linie, die gleich liegt mit den Punkten auf ihr selbst“ nichts Klares besagt.

Nach moderner Auffassung hat ein Axiomensystem nur den Charakter eines Systems von Spielregeln, nach denen bei der Herleitung neuer Sätze operiert werden muß. Es wird nicht der einzelne Begriff, sondern die Gesamtheit der auftretenden Begriffe durch ein – wie man sagt – „System impliziter Definitionen“ festgelegt; und zwar nicht in einem absoluten Sinn, sondern nur in der gegenseitigen Beziehung und überdies nur soweit, als es die in den Axiomen ausgedrückten operativen Regeln betrifft.

Es ist wohl verständlich, daß durch diese formale Auffassung, bei der jeder Bezug auf einen gegenständlichen Inhalt fehlt, daß durch diesen hohen Grad der Abstraktion auch die Allgemeinheit der Theorie, ihre Anwendbarkeit auf die verschiedensten Bereiche gesteigert worden ist. Weitere Vorteile sind, daß durch die Elimination der Anschauung ein größerer Grad von Sicherheit erreicht wird und vor allem, daß durch diese neu gewonnene Freiheit die mathematischen „Kompositionsmöglichkeiten" außerordentlich erweitert worden sind: In freiem künstlerischem Spiel, nur durch ein Gefühl für mathematische Werte geleitet, kann man Axiome abwandeln, weglassen, hinzufügen oder überhaupt ganz neue Axiomensysteme schaffen und studieren. Eine grundsätzliche und in gewissem Sinne nicht überwindbare Schwierigkeit muß man allerdings dafür in Kauf nehmen: Bei einer formalen Auffassung der Axiome, bei einer willkürlichen Setzung von Axiomen ist man nicht sicher, daß das Axiomensystem nicht einen verborgenen Widerspruch enthält. Solange man ein Axiomensystem guten Gewissens als Formulierung unmittelbar evidenter Sachverhalte auffassen kann, tritt diese Schwierigkeit nicht auf.

Lassen Sie mich das axiomatische Vorgehen an einem einfachen Beispiel erläutern, das uns dann zu gewissen Anwendungen der Mathematik und allgemeiner zu der Frage der Rolle der Mathematik in unserer Zeit überleiten wird. Wir haben auf der Schule die 4 Grundrechnungsarten, die sogenannten rationalen Rechenoperationen, für die rationalen Zahlen, d. h. für die gewöhnlichen Brüche einschließlich der ganzen Zahlen, erlernt. Alle in dieser Theorie gültigen Sätze lassen sich aus 7 Grundregeln, den sogenannten Körperaxiomen herleiten. Jedes System von Elementen, das diese Axiome erfüllt, heißt ein Körper. Nicht nur die rationalen Zahlen, sondern auch die reellen Zahlen, d. h. die Menge aller endlichen und unendlichen Dezimalbrüche bilden einen Körper, desgleichen die komplexen Zahlen, die durch Hinzunahme der imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$ entstehen. Jeder Satz, der aus den Körperaxiomen folgt, gilt also gleichzeitig für alle diese Zahlensysteme und für viele andere, hier nicht aufgeführte.

Von den vielen Abwandlungen, die dieses Axiomensystem erfahren hat und die zum Studium immer neuer, teilweise auch praktisch eminent wichtiger Strukturen geführt haben, wollen wir eine einzige etwas näher betrachten. Von den 7 Körperaxiomen lassen wir zwei weg, nämlich diejenigen über die Ausführbarkeit der Subtraktion und Division, und behalten nur bei die Forderungen, daß man in einer Summe bzw. in einem Produkt die Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren vertauschen darf (das sogen. Kommutativgesetz) und etwaige Klammern beliebig setzen oder weglassen darf (Assoziativgesetz), sowie das Distributivgesetz für das „Auflösen" einer Klammer: $a(b+c) = ab + ac$. Diesem verkleinerten Axiomensystem genügen natürlich die oben angeführten Körper erst recht, wir wollen ihm aber noch einige andere inhaltliche Deutungen geben.

Die Elemente seien jetzt beliebige Punktmengen in der Ebene, z. B. Kreise, Quadrate, irgendwelche Kurvenstücke, einzelne Punkte usw. Wir wollen auch noch die sogenannte O-Menge einführen, die dadurch definiert ist, daß sie gar keinen Punkt enthält. Die Addition $a+b$ zweier Elemente, d. h. zweier Punktmengen a und b sei dadurch definiert, daß wir die Vereinigungsmenge bilden, die aus genau allen den Punkten besteht, welche in wenigstens einer der beiden Mengen a, b liegen. Unter $a \times b$ wollen wir den sogenannten Durchschnitt von a und b verstehen, d. h. die Menge aller Punkte, die sowohl in a wie in b liegen. Diese beiden Verknüpfungen sind trivialerweise kommutativ und assoziativ. Aber auch das distributive Gesetz gilt, wie man leicht nachprüfen kann. Darüber hinaus gilt aber für unsere Mengen noch ein zweites Distributivgesetz, bei dem die beiden Verknüpfungen ihre Rolle vertauscht haben. Jedes System mit diesen Axiomen, also zwei kommutativen, assoziativen und distributiven Verknüpfungen heißt ein distributiver Verband.

Man erkennt leicht, daß es bei dieser Betrachtung völlig unwesentlich ist, daß wir von Punktmengen gesprochen haben; wir können auch irgendwelche andere Mengensysteme nehmen. Denken wir uns z. B. eine feste Menge von Gegenständen, die wir nach Farben sortieren können, oder nach Größe oder nach Gewicht usw. Dann können wir die Menge der gelben Gegenstände betrachten oder die der roten oder die der kleinen (wenn wir etwa nur zwei Größenklassen klein und groß unterscheiden). Sei a die Menge der gelben Gegenstände, b die der kleinen, dann ist der Durchschnitt von a und b offenbar die Menge der Gegenstände, die gelb *und* klein sind, wobei „und" im Sinne des Sowohl-als-auch zu verstehen ist. Ein Gegenstand gehört dagegen zur Vereinigungsmenge von a und b, wenn er entweder gelb oder klein oder beides zugleich ist, kürzer wenn er gelb *oder* klein (im Sinne des lateinischen vel) ist. Da die Begriffe „Vereinigung" und „Durchschnitt" also völlig äquivalent sind mit den logischen Verknüpfungen *und* und *oder,* wird es verständlich, daß die Verbandstheorie auch auf die Logik anwendbar ist und daß man damit eine Möglichkeit gewonnen hat, logische Deduktionen in einer Formel schriftlich zu vollziehen und darzustellen.

Wir wollen noch ein drittes, diesmal nicht aus der Begriffswelt, sondern aus der Technik entnommenes Beispiel für einen Verband betrachten. Denken wir uns einen elektrischen Stromkreis mit einem Schalter und einer Lampe, die bei Schließen des Schalters aufleuchtet. Bringen wir jetzt hintereinander zwei Schalter a, b an, so leuchtet die Lampe offenbar nur, wenn beide Schalter geschlossen, wenn also a *und* b geschlossen sind. In einem anderen Kreis dagegen, in dem die beiden Schalter parallel nebeneinander liegen, leuchtet die Lampe, wenn a *oder* b geschlossen ist. Wir erkennen, daß auch für die Analyse solcher, und zwar auch sehr kompliziert zusammengesetzter Schaltkreise die Verbandstheorie zuständig ist.

Da sich aber alle die genannten Beispiele in ihrer *Struktur*, die ja durch die Verbandsaxiome beschrieben wird, überhaupt nicht unterscheiden, wird es verständlich, daß man die logischen Operationen durch Schaltkreise realisieren kann, d. h. daß man Maschinen bauen kann, welche logische Operationen vollziehen, die also in diesem eng umrissenen Sinne „denken" können. Daß sie auch rechnen können, ist wegen des engen Zusammenhangs zwischen den Verbandsaxiomen und den Körperaxiomen dann kein Wunder mehr.

Ich habe das Beispiel der Verbandstheorie und ihrer Anwendung nicht nur deshalb so ausführlich gebracht, weil Sie daran einen Eindruck von der axiomatischen Methode gewinnen konnten, sondern weil gerade dieses Beispiel zeigt, wie hier Mathematik, Logik und Technik, begründet durch die gleiche Struktur, eine Einheit bilden, so daß die Frage, „was worauf angewandt wird", nicht mehr sinnvoll erscheint. Nur am Rande möchte ich erwähnen, daß die im Laufe des letzten Jahrhunderts erfolgte Begegnung von Mathematik und Logik eine ähnliche Wirkung gehabt hat wie das Eindringen des Prinzen in das verzauberte Schloß des Dornröschen: Nach vielhundertjährigem tiefem Schlaf ist die Logik wieder zu blühendem und fruchtbarem Leben erwacht.

Dieses Eindringen der Mathematik, mathematischer Methoden und vor allem mathematischer Denkweise in Gebiete, die ihr bisher verschlossen schienen, scheint mir überhaupt kennzeichnend für die Entwicklung vieler Wissenschaften in den letzten Jahrzehnten zu sein. Soweit es sich um Wissenschaften vom Menschen handelt, z. B. Psychologie, Soziologie, Nationalökonomie sind starke Widerstände, besonders in Deutschland, zu beobachten. Man meint, der Mensch sei nicht berechenbar, und übersieht, daß die Mathematik nicht mit Rechnen identisch ist; ganz abgesehen davon, daß zahlenmäßige statistische Aussagen, die sich ja nicht auf Individuen, sondern auf ganze Gruppen beziehen, erfahrungsgemäß durchaus auch bei Menschen möglich sind. Ein weiterer grundsätzlicher Einwand, der insbesondere von Nationalökonomen häufig erhoben wird, ist der, daß die Phänomene zu kompliziert seien, um mathematisch erfaßbar zu sein. Insbesondere könne man mit den bisher aufgestellten Theorien praktisch überhaupt nichts anfangen. Darauf ist zu erwidern, daß die Mathematik *das* Hilfsmittel zur Behandlung komplizierter Sachverhalte ist; und was die praktische Anwendung angeht: die moderne auf der Mathematik und den exakten Naturwissenschaften beruhende Entwicklung der Technik wäre nie zustande gekommen, wenn Mathematiker und Physiker ihre Theorien stets im Hinblick auf die praktische Anwendbarkeit entwickelt hätten.

Die Zeit erlaubt es nicht, auf alle oder auch nur einige dieser modernen Anwendungsgebiete der Mathematik einzugehen. Ich möchte mich vielmehr beschränken auf Fragen, die mit der mathematischen Behandlung von Problemen der Sprache zusammenhängen. Lassen Sie mich ein konkretes Beispiel herausgreifen. Vor wenigen Wochen ging durch die Tagespresse die Meldung, daß die sogenannte „Homerische Frage", ob nämlich die Ilias das Werk eines einzelnen Mannes, eben Homers, oder eine Sammlung von mündlich überlieferten Heldensagen darstelle, von einem jungen amerikanischen Philologen mit Hilfe eines Elektronenrechners endgültig gelöst worden sei. Diese Frage, die bereits in hellenistischer Zeit von den alexandrinischen Gelehrten aufgeworfen wurde, hat nicht nur die Altphilologen, sondern auch Männer wie Herder und Goethe aufs stärkste bewegt und zu einem umfangreichen, reichhaltigen und scharfsinnigen Schrifttum geführt, wobei zwischen bedingungslosem Ja und einem ebensolchen Nein kaum eine mögliche Variante als Antwort auf die Frage ausgelassen und die verschiedensten Formen der Argumentation benutzt wurden. Jener amerikanische Philologe dagegen hat konsequent die Methoden der modernen Sprachstatistik angewandt. Hier wird ein sprachliches Werk nicht auf seinen Inhalt oder seine ästhetische Form untersucht, sondern auf verhältnismäßig äußerliche Merkmale, die aber objektiv, nämlich zahlenmäßig, erfaßbar sind. Solche Merkmale sind z. B. die relative Häufigkeit von 1-silbigen, 2-silbigen, allgemein n-silbigen Worten oder metrische Merkmale wie die Anzahl der Hebungen und Senkungen in Textabschnitten bestimmter Länge und dergleichen. Hat man einen genügend großen Kanon solcher Merkmale aufgestellt, so läßt sich der Stil eines Schriftstellers durch die Angabe dieser Kennziffern charakterisieren. Stellt man demnach für zwei Gesänge der Ilias fest, daß sie durchweg dieselben Kennwerte besitzen, so müssen sie von demselben Dichter stammen. Auf Grund einer Pressenotiz läßt sich natürlich kein Urteil über eine wissenschaftliche Arbeit abgeben; interessant ist aber doch, daß sich das Ergebnis der sprachstatistischen Untersuchung deckt mit dem der modernen Graecistik, verkörpert etwa in den Arbeiten Wolfgang *Schadewaldts*[6]: Die Ilias ist kein Sammelwerk, sondern wurde von einem einzigen Dichter geschaffen.

6 W. Schadewaldt, Von Homers Welt und Werk. Stuttgart 1959.

Mir scheint, das Unbehagen, das sich angesichts derartiger Methoden einstellen könnte, vergeht rasch, wenn man sich klar macht, daß es sich bei der „Homerischen Frage“ um ein Zuschreibungs-, also um ein Identifizierungsproblem handelt. Ein Mensch wird ja auch am einfachsten und sichersten durch seinen Fingerabdruck identifiziert und nicht durch eine „Wesensschau“. Unbestreitbar freilich ist, daß die klassischen Versuche, die „Homerische Frage“ zu lösen, eine Fülle tiefer Einsichten über Homers Werk und sein Zeitalter zutage gefördert haben. Daran gemessen muß die statistische Methode dürftig, wenn nicht barbarisch erscheinen. So betrachtet freilich wird das Suchen nach der Antwort wichtiger als die Antwort selbst und die Frage der Zuschreibung eines Kunstwerkes nur ein Weg, sich besonders intensiv mit dem Werk auseinanderzusetzen.

Wurde hier die Sprachstatistik zum Zwecke der Stilbestimmung benutzt, so wird sie in der sogenannten Informationstheorie vor allem für die Bedürfnisse der Nachrichtentechnik verwendet. Hier wird ein Text primär als eine durch Zufall entstandene Folge von Zeichen aufgefaßt. Ist die statistische Häufigkeitsverteilung der Zeichen oder Zeichenkombinationen bekannt, so läßt sich der Informationsgehalt eines Textes angeben und damit auch der mittlere Informationsgehalt eines einzelnen Zeichens. Je mehr man von dem Text erraten kann, desto kleiner ist die Maßzahl der Information. Ein praktischer Wert dieser Maßzahlen besteht darin, daß sie einen Anhalt geben für den bei einer Codierung, etwa für den Lochstreifen eines Fernschreibers, benötigten Aufwand.

Bereits aus dieser bruchstückhaften Skizze der Thematik der Informationstheorie werden Sie erkennen, daß der auf eine Statistik der Zeichen gegründete Begriff der Information sehr eng gefaßt ist. Im Gegensatz zu dem in der Umgangssprache üblichen Gebrauch hat er keinen Bezug auf die inhaltliche Bedeutung des Textes, aber auch nicht auf seine grammatische Struktur, obwohl doch beides für den Informationsgehalt eine entscheidende Bedeutung hat. So ist die Informationstheorie in einem schmalen, für die Technik besonders wichtigen Sektor weit fortgeschritten, während andere grundlegende und sicher auch praktisch wichtige Fragen vergleichsweise vernachlässigt wurden.

Die Verarbeitung, die Umwandlung von Informationen geschieht heute weithin automatisch, am häufigsten mit universalen Digitalrechnern. Diese können ja nicht nur rechnen, also Zahleninformationen verarbeiten, sondern auch Sprachen übersetzen und vieles andere mehr. Ein immer brennender werdendes Problem ist z. B. das der wissenschaftlichen Dokumentation, also die Aufgabe, die Fülle der täglich produzierten wissenschaftlichen Informationen zu erfassen und für den Interessenten auffindbar und zugänglich zu machen. Es liegt auf der Hand, daß alle diese Aufgaben nicht von Mathematikern und Technikern allein gelöst werden können, sondern daß die Vertreter anderer, insbesondere geisteswissenschaftlicher Fächer entscheidende Beiträge leisten müssen.

Dieses Aufeinander-angewiesen-sein der Spezialwissenschaften, verbunden mit einer starken Mathematisierung, ist kennzeichnend für zahlreiche junge und aufstrebende Wissenschaften. Vielleicht läßt sich so von unten, von den Einzel-Disziplinen her die Einheit der Wissenschaft wieder erreichen, die von Theologie oder Philosophie heute nicht mehr bewirkt werden kann. Bei dem Erfahrungsaustausch, der durch die gemeinsame Bearbeitung der neuartigen Probleme entsteht, werden alle beteiligten Partner auch für ihre traditionellen Fragen und Methoden Gewinn davontragen. Im Problemkreis der „Denkautomaten" z. B. wird die auf das Konkrete und modellmäßig Darstellbare drängende, operationelle Denkweise des Technikers und Mathematikers den Philosophen und Anthropologen zwingen, seine alten Vorstellungen und Begriffe von Urteilen, Verstehen, Entscheiden, Lernen usw. neu zu überdenken, während umgekehrt der Mathematiker und Techniker immer wieder auf die Begrenztheit seiner Methoden hingewiesen werden wird.

Als einfaches Beispiel für solche Probleme philosophischen Charakters sei die Frage genannt, ob die Produkte eines modernen Rechengerätes, z. B. der Beweis eines geometrischen Satzes noch als „Erkenntnis" bezeichnet werden können, und wenn ja, ob diese von einer Maschine gelieferte Erkenntnis nicht einen wesentlich anderen Charakter hat als die von einem Menschen gewonnene. Ohne mich auf eine Definition der Erkenntnis oder gar ihres „Wesens" einzulassen, möchte ich meine Meinung begründen, daß in diesem Punkte keine wesentlichen Unterschiede zwischen der von einem Menschen und der durch eine Maschine gewonnenen Erkenntnis bestehen [7]. Lassen Sie mich das zunächst an dem vielleicht durchsichtigeren Fall des Rechnens demonstrieren.

Die Aussage $2 \times 5 = 10$ kann der Mensch noch mit einem Evidenzerlebnis verbinden, notfalls mit Hilfe der 2×5 Finger seiner beiden Hände. Normalerweise verläßt er sich aber einfach auf sein Gedächtnis, ohne sich den Inhalt dieser Aussage bewußt zu machen. Beim großen Einmaleins wird das in noch stärkerem Maße der Fall sein, und bei der Multiplikation mehrstelliger Zahlen wird er mechanisch eine früher einmal generell als richtig erkannte

7 Im Gegensatz hierzu vgl. G. M. Schwab (Universitas 16, 191): Und das andere Problem ist, ob das Resultat der Maschine wirklich noch das ist, was wir Erkenntnis nennen. . . . Wir können gewiß mit dem Ergebnis solcher Rechnungen die Natur technisch meistern, dieses aber nur, ohne daß wir sie eigentlich recht verstanden haben.

Rechenvorschrift, einen sogenannten Algorithmus, ausführen. Dadurch, daß diese „mechanische" Arbeit von einer Maschine übernommen wird, kann sich am Wesen und Wert der gewonnenen Erkenntnis doch wohl nichts geändert haben.

Beim logischen Deduzieren liegen die Dinge aber nicht anders als beim Rechnen. Einfache logische Sachverhalte sind noch unmittelbar evident, bei komplizierteren logischen Gebilden dagegen muß man zum formalen logischen Kalkül greifen und ist damit in derselben Situation wie beim Rechnen. Mithin besteht auch beim logischen Deduzieren kein wesentlicher Unterschied zwischen dem, was der Mensch und was die Maschine tut.

Die Entwicklung der Automaten wird uns zwingen, über das Rechnen und das Vollziehen logischer Schlüsse hinaus noch manches andere als nicht typisch menschlich zu erkennen. Aber so wie der Sturz des Menschen aus dem Zentrum der Welt durch Kopernikus ihm nichts von seiner Würde und seiner wesentlichen Substanz genommen hat, so werden auch diese neuen Entwicklungen die Kernsubstanz nicht antasten können. Ein gewisser innerster Bezirk, den man aber nicht vorwitzig abzustecken versuchen sollte, wird der Mathematik und der Wissenschaft überhaupt wohl für immer verschlossen bleiben.

Lassen Sie mich schließen mit zwei Aussprüchen der beiden großen mathematischen Rivalen *Leibniz* und *Newton.* Leibniz [8] sagte: „Sans les mathématiques on ne pénètre point au fond de la philosophie. Sans la philosophie on ne pénètre point au fond des mathématiques. Sans les deux on ne pénètre au fond de rien." (Ohne die Mathematik dringt man niemals auf den Grund der Philosophie. Ohne die Philosophie dringt man niemals auf den Grund der Mathematik. Ohne beide kommt man auf den Grund von gar nichts.) Und nach diesem anspruchsvollen Wort der Ausspruch Newtons [9], der in unübertrefflicher Weise Bescheidenheit und Demut des großen Forschers ausdrückt: „I do not know what I may appear to the world; but to myself I seem to have been only like a boy playing on the seashore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me." (Ich weiß nicht, wofür mich die Welt hält; mir selbst komme ich vor wie ein Kind, das am Meeresstrand spielt und sich freut, wenn es dann und wann einen glatteren Kiesel oder eine schönere Muschel als gewöhnlich findet, während der große Ozean der Wahrheit unerforscht vor ihm liegt.)

---

8 Zitiert nach H. Hermes, Einführung in die mathematische Logik. Münster 1957.
9 D. Brewster, Memoirs of the life, writings and discoveries of Sir Isaac Newton. Edinburgh 1855, p. 407