BSB Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum
Digitale Bibliothek

Harzer, Paul

Die Sterne und der Raum Rede beim Antritte des Rektorates der Königlichen Christian-Albrechts-Universität am 5. März 1908

Kiel 1908

H.lit.p. 417 cb,A-1902/29
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11168414-5

11168414

11168414

Nur P. 417 ab (A, 190

Die Sterne und der Raum.

Festrede

Rede

beim Antritte des Rektorates

der

Königlichen Christian-Albrechts-Universität

am 5. März 1908

gehalten von

PAUL HARZER.

Kiel 1908.
Kommissionsverlag für die Universität Kiel,
Lipsius & Tischer.
Druck von Schmidt & Klaunig.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Die Sterne und der Raum.

Rede

beim Antritte des Rektorates

der

Königlichen Christian-Albrechts-Universität

am 5. März 1908

gehalten von

PAUL HARZER.

Kiel 1908.
Kommissionsverlag für die Universität Kiel,
Lipsius & Tischer.
Druck von Schmidt & Klaunig.

11168414

Hochansehnliche Versammlung!

Im Zeitalter der Reformation hat Koppernigk endgültig der Sonne die ihr gebührende zentrale Stellung in unserem Systeme angewiesen, die bis dahin widerrechtlich für die Erde in Anspruch genommen worden war. Kurz vor dem Beginne des dreißigjährigen Krieges hat dann Kepler die Gesetze der Planetenbewegung entdeckt und nicht sehr lange nach dem Ende des Krieges hat Newton in der allgemeinen Schwere die Kraft gefunden, der die Bewegungen in unserem Sonnensysteme gehorchen. Seitdem hat die Astronomie, durch diese grundlegenden Taten auf den richtigen Weg gebracht, in geschickter Vereinigung der Beobachtungen und der mathematischen und numerischen Berechnung die mechanischen Verhältnisse im Sonnensysteme befriedigend erforscht. Das vorige Jahrhundert hat endlich durch die Ausbildung des Fernrohres und die Entdeckung des Spectroscopes, des Photometers, der photographischen Camera die Hülfsmittel zur Erforschung auch der physikalischen Beziehungen der Himmelskörper geschaffen. Wir fühlen uns seitdem auch in den physikalischen Verhältnissen unseres Sonnensystemes nicht mehr fremd und dürfen hoffen, daß absehbarer künftiger Arbeit auch hier eine erschöpfende Durchforschung gelingen werde. Der in mechanischer Rücksicht ihres Prinzipates beraubten Erde ist in physikalischer Beziehung eine Vorzugsstellung wieder zu Teil geworden, da es nicht unwahrscheinlich ist, daß die klimatischen Verhältnisse für die Entfaltung organischen Lebens und für die Entwickelung denkender Wesen auf der Erde viel günstiger seien, als auf anderen Körpern unseres Sonnensystemes.

Weit geringer sind aber bisher die Ergebnisse unserer Forschungen in dem Raume außerhalb des Sonnensystemes. Bei der gewaltigen Zahl der Sterne, bei der Größe ihrer Entfernungen, bei der geringen Bewegung unseres Beobachtungsortes im Raume sind die

Erfahrungen vieler Jahrtausende für die gründliche Erforschung der Sternenwelt erforderlich, während genaue Beobachtungen noch nicht zwei Jahrhunderte überspannen. Wie aber die Ausbeute eines jungfräulichen Bodens verhältnismäßig ergiebig zu sein pflegt, so haben unsere Forschungen in der Sternenwelt immerhin bereits jetzt manche wichtige Resultate mit Sicherheit ergeben. Die Sterne sind leuchtende Körper, wie die Sonne, aus denselben chemischen Elementen aufgebaut und physikalisch von ähnlicher Beschaffenheit; sie bewegen sich im Raume; nach der Art wandernder Vögel haben ganze Gruppen von Sternen nahezu gleiche Richtung und Geschwindigkeit der Bewegung; zu einer solchen Gruppe gehört unsere Sonne mit den hellen Sternen Capella, Beteigeuze, Wega, Atair[1]); ein großer Teil aller Sterne scheint sich zwei solchen Gruppen anzugliedern[2]). Viele Sterne stehen einander paarweise, aber auch in größerer Zahl, so nahe, daß ihre Anziehung sie in ähnlicher Weise zu gegenseitigen Umkreisungen zwingt, wie sie die Erde mit dem Monde, die Sonne mit den Planeten ausführt. Auch dunkle Sterne, die sich nur durch ihre Anziehung und ihre verfinsternde Wirkung verraten, spielen in diesen Systemen eine Rolle. Die Art dieser Bewegungen berechtigt uns zu der an und für sich sehr wahrscheinlichen Annahme, daß das Gesetz der allgemeinen Schwere in der ganzen Sternenwelt ebenso gelte, wie für unser Sonnensystem. Und die Gemeinsamkeit der Gesetze und die Gleichartigkeit des Aufbaues erweisen, daß die Sterne Sonnen sind und mit unserer Sonne eine einheitliche Welt bilden. In dieser Welt giebt es Sonnen, die hundert, ja tausend Mal größer und heller sind, als die unsrige, und wir Erdenbewohner müssen bescheiden hinter den Möglichkeiten zurückstehen, die günstigere Verhältnisse auf Planeten in den Systemen anderer Sonnen für die Entwickelung höherer Organismen darbieten können.

Der Anblick des gestirnten Himmels treibt unsere Phantasie in die Tiefen des Weltraumes von Stern zu Stern und erregt in uns eindringlichst die Antwort erheischende Fragen: Erstreckt sich die Sternenwelt in das Unendliche oder giebt es eine Grenze und wissen wir jenseits einer solchen Grenze von anderen Sternensystemen unbegrenzt fort in das Unendliche, wohin keine Vorstellung zu folgen vermag?

Wir sind im Stande, die Antworten auf diese Fragen aus gewissen statistischen Durchforschungen des Himmels abzuleiten.

Es ist nicht schwer darzulegen, wie die Entscheidung der Frage der Begrenztheit oder Unbegrenztheit der Sternenwelt möglich gewesen ist: Jeder Stern sendet eine gewisse Menge Licht aus, er hat eine gewiße Leuchtkraft, die für verschiedene Sterne sehr verschieden ist. Die nach sogenannten Größen bemessene Helligkeit, in der der Stern uns erscheint, hängt einerseits von seiner Leuchtkraft, andererseits von seiner Entfernung von uns ab, indem die Helligkeit mit wachsender Entfernung nach einem bestimmten Gesetze rasch abnimmt. Den Sternen nun, die wir mit unbewaffnetem Auge am Himmel erblicken, von den hellsten Sternen der ersten Größe bis zu den schwächsten Sternen, die wir der sechsten Größe zurechnen, können wir noch schwächere hinzufügen, wenn wir ein Fernrohr anwenden. Das Fernrohr vergrößert gewissermaßen die Pupille unseres Auges auf die Größe des Fernrohrobjektives, indem unserem Auge alles Licht zugeführt wird, das auf dieses Objektiv fällt. Mit der Vergrößerung des Objektives wächst deshalb auch die Zahl der sichtbaren Sterne, indem immer schwächere hinzutreten. Die Wirkung des Fernrohres ist dabei eine zweifache: Das größere Fernrohr dringt tiefer in den Raum ein, als das kleinere, nämlich bis auf die Entfernungen, in denen die Sterne von der höchsten vorkommenden Leuchtkraft als schwächste Sterne eben sichtbar werden; es zeigt aber auch innerhalb des von dem kleineren Fernrohre bestrichenen Raumes die Sterne von geringer Leuchtkraft, die der geringeren optischen Kraft des kleineren Fernrohres unerreichbar bleiben. Die Vergrößerung des Fernrohres wirkt, wie kurz und verständlich gesagt werden darf, raumerweiternd und nachlesend. Ist nun der ganze Raum bis in das Unendliche mit Sternen besetzt, so wächst die Zahl der sichtbaren Sterne mit der Größe des Fernrohres sowohl durch seine raumerweiternde, wie seine nachlesende Wirkung unbegrenzt. Hat aber die Sternenwelt Grenzen, so wächst die Zahl der sichtbaren Sterne mit der Größe des Fernrohres nicht unbegrenzt. Denn, wenn die optische Kraft des Fernrohres gerade so groß geworden ist, daß in einer bestimmten Richtung ein an der Grenze stehender Stern von der höchsten vorkommenden Leuchtkraft als schwächster Stern sichtbar wird, so ist die raumerweiternde Wirkung des Fernrohres erschöpft und die weitere Vergrößerung des Fernrohres kann also die Zahl der sichtbaren Sterne nicht mehr raumerweiternd, sondern nur noch nachlesend erhöhen, indem die in dem begrenzten Sternensysteme eingeschlossenen schwächeren

Sterne, deren Zahl selbst begrenzt ist, sichtbar werden. Das Unwirksamwerden der raumerweiternden Kraft des Fernrohres, durch das der eine der zwei Faktoren für die Vergrößerung der Zahl der sichtbaren schwächeren Sterne wegfällt, muß sich nun darin offenbaren, daß das Gesetz, nach dem die Zahl der in einer bestimmten Richtung sichtbaren Sterne mit der abnehmenden Helligkeit der schwächsten Sterne wächst, ein anderes ist vor und ein anderes nach der Erreichung der Grenze. Ein etwa vorhandener Sprung in dem Gesetze kann für jede Richtung des Fernrohres durch die bloße Abzählung der Sterne bis zu bestimmten Größen festgestellt werden. Tritt der Sprung bei einer bestimmten Richtung des Fernrohres etwa bei den Sternen 13. Größe wirklich ein, so ist daraus zu schließen, daß das Sternensystem in dieser Richtung eine Grenze hat und zwar in einer Entfernung, in der ein Stern von der höchsten vorkommenden Leuchtkraft der 13. Größe angehört.

Das vorhandene statistische Material erstreckt sich über alle Sterne des Himmels bis zur 9. Größe[3]) in Abstufungen von Zehnteln der Größe, und außerdem besitzen wir für sehr große Teile des Himmels, aber ohne Abstufung, die Zahlen der Sterne bis zur 14. Größe[4]). Zur Überbrückung des Zwischenraumes zwischen den Sternen der 9. und 14. Größe in Abstufungen haben wir bisher noch kein ausreichendes Material. Aber auch das vorhandene Material genügt, um mit Sicherheit zu bezeugen, daß der Sprung in allen Richtungen wirklich vorhanden ist und zwischen der 9. und 14. Größe erfolgt[5]). Es ist damit erwiesen, daß die Sternenwelt in allen Richtungen begrenzt ist. Bei seiner Unvollständigkeit gestattet das Material, das gewiß in absehbarer Zeit ergänzt sein wird, genauere Bestimmungen über die Beschaffenheit des endlichen Sternensystemes zunächst nur dann, wenn gewisse Annahmen über die Leuchtkraft der Sterne gemacht werden. Die plausible Annahme, daß das Mischungsverhältnis der Sterne von verschiedener Leuchtkraft an allen Stellen des Systemes dasselbe sei[6]), ergibt aus den Zählungen sogleich die Dichtigkeit mit der die Sterne in einer bestimmten Richtung im Raume verteilt sind. Nimmt man überdies noch an, daß jenes Mischungsverhältnis in Bezug auf die Leuchtkraft gleichmäßig sei, daß also Sterne von allen Abstufungen der Leuchtkraft von der höchsten bis zur verschwindenden an allen Stellen des Raumes prozental gleich häufig vorkommen[7]), so können

wir die Lücke des Materiales überbrücken und auch die Lage des Sprunges, die Gestalt und Ausdehnung des Sternensystemes, die Dichtigkeit, mit der die Sterne beliebige Stellen des Raumes erfüllen und die Gesamtzahl aller Sterne, auch derjenigen bestimmen, die wegen ihrer Schwäche noch kein Fernrohr gezeigt hat und keines zeigen wird.

Bei der Durchführung der Rechnungen auf dieser Grundlage hat man bisher angenommen, daß das Licht auf seiner Wanderung durch den Weltraum nur durch seine geometrische Ausbreitung auf größere Flächen, nicht aber durch Absorption geschwächt werde. Es kam überdies bei diesen Rechnungen darauf an, die Beschaffenheit des Sternensystemes nicht in einzelnen Zügen, sondern nur in großen Umrissen festzustellen. Es sind deshalb auch die Verhältnisse nicht in einzelnen Richtungen untersucht, sondern die Beobachtungsergebnisse für große Flächen der Himmelskugel zusammengezogen worden, schon um den Einfluß von Zufälligkeiten zu vermindern und eine größere Wahrscheinlichkeit für das Zutreffen der über das Mischungsverhältnis gemachten Annahmen zu gewinnen. Die Art der Einteilung des Himmels in größere Flächen war dabei durch die Milchstraße gegeben[8]), jenes etwas unregelmäßige, den Himmel umgürtende, in zwei ungefähr gleiche Teile zerlegende Band, dessen Schimmer, wie schon das unbewaffnete Auge vermuten läßt und das Fernrohr bestätigt, durch dichtgedrängte schwache Sterne entsteht. Beträchtliche regelmäßige Verschiedenheiten in der Anordnung der Sterne bestehen weder längs der Milchstraße noch längs ihr parallel laufender Streifen der Himmelskugel. Man darf sich deshalb, um ein genähertes Bild zu erhalten, mit der Untersuchung der Verhältnisse unseres Sternensystemes in verschiedenen Richtungen zur Milchstraße begnügen. Es ist ferner ratsam, die nächste Umgebung der Sonne von der Betrachtung auszuschließen, weil bei der verhältnismäßig geringen Zahl der Sterne in ihr Zufälligkeiten der Anordnung eine sonst vorhandene Gesetzmäßigkeit gefährden können. Das Beobachtungsmaterial ergiebt nun[9]), daß die Sonne nicht sehr fern von der Mitte des Systemes liegt, daß die Dichtigkeit, in der die Sterne im Raume verteilt sind, in allen Richtungen nach außen bis zu den Grenzen des Systemes abnimmt, in der Milchstraße, mit Ausschluß der Umgebung der Sonne, etwa im Verhältnisse von 5 : 2, in gegen die Milchstraße geneigten Richtungen allmählich stärker, senkrecht zur

Milchstraße im Verhältnisse von 11 : 1. Der Sprung im Gesetze der Sternzahlen liegt in der Milchstraße und senkrecht zu ihr bei den Sternengrößen 12.4 und 13.3 und es folgt daraus, daß das Sternensystem die Gestalt eines an den Polen der Milchstraße etwas flach gedrückten Rotationskörpers hat. Mit Hülfe bekannter Entfernungen von Sternen ergeben sich die Durchmesser des Sternensystemes in der Milchstraße und senkrecht zu ihr 470 und 310 Millionen mal größer als die Entfernung der Sonne von der Erde. Das Licht, das in einer Sekunde einen Weg zurücklegt, der $7^1/_2$ mal so lang ist, als der Umfang der Erde am Äquator, braucht, um das Sternensystem in den beiden Richtungen zu durchqueren, 7400 und 5000 Jahre. Bei dem Anblicke des gestirnten Himmels bieten sich uns also gleichzeitig Erscheinungen dar, die in ihrer Entstehung zeitlich bis zu fast 4000 Jahren auseinander liegen. Das uns jetzt erreichende Licht des fernsten sichtbaren Sternes ist ungefähr seit einer Zeit unterwegs, auf die die Anfänge der Geschichte des Menschengeschlechtes vielleicht eben zurückreichen. Die Zahl der leuchtenden Sterne überhaupt beträgt 35 Millionen und dazu liefert der 20° breite Gürtel der Milchstraße allein 21 Millionen. Hinzu kommen die dunkelen Sterne, deren Zahl ganz unbekannt ist.

In diesen Ergebnissen kann eine Änderung eintreten, wenn unsere Voraussetzung über das Mischungsverhältnis der Sterne nicht zutrifft und wenn das Licht im Weltraume eine Absorption erleidet. Bei der Berücksichtigung einer etwa vorhandenen Absorption würde das Sternensystem dichter zusammengedrängt gefunden werden, die Gesamtzahl der Sterne aber unverändert bleiben[10]). Welche Annahme man aber auch über das Mischungsverhältnis der Sterne und die Größe der Absorption machen möge, so bleibt das wichtigste Ergebnis völlig unberührt bestehen, daß das Sternensystem eine endliche Ausdehnung hat.

Unsere erste Frage ist damit erledigt. Auch auf die zweite, ob außerhalb unseres Sternensystemes andere Sternensysteme bekannt seien, können wir aus statistischen Ergebnissen unserer Durchforschung des Himmels die Antwort finden.

Schon das unbewaffnete Auge erkennt am Himmel einige kleine Stellen matten verwaschenen Lichtes und mit Hilfe des Fernrohres sind gegen 10000 solcher Stellen gefunden worden. Das Fernrohr und das Spectroscop lehren uns, daß diese Gebilde

zum geringen, etwa dem fünfzehnten Teile, dichte Ansammlungen von Sternen, oft zu vielen Tausenden sind, meist aber als Nebel bezeichnete, gewöhnlich mit Sternen vereinigte Massen von Gasen und staubförmigen Stoffen, die uns durch die Beleuchtung benachbarter Sterne und überdies vermutlich dadurch sichtbar werden, daß sich die von den Sternen, wie von der Sonne, mit Lichtgeschwindigkeit ausgeschleuderten negativ elektrisch geladenen Partikelchen bei dem Eindringen in die Nebel entladen. Früher wurde angenommen, daß diese verschiedenen Gebilde weit außerhalb unseres Sternensystemes liegende Welten in allen Stadien einer Entwickelung wären, die jedes Sternensystem mit dem reinen Nebel beginnend und bis zum reinen Sternhaufen, bei dem unser Sternensystem bereits angekommem wäre, fortschreitend zu durchlaufen hätte. Dieser Gedanke, daß uns so eine Entwickelungsgeschichte der Sternensysteme vor die Augen gestellt sei, hat aber der Forschung nicht Stand zu halten vermocht. Spricht schon die Klarheit der Bilder und die Helligkeit der einzelnen Sterne in beiden Arten von Gebilden dagegen, daß sie weit außerhalb der Grenzen unseres Sternensystemes lägen, so ist auch hier wieder ein Ergebnis der Statistik entscheidend: Die Sternhaufen finden sich nämlich fast nur in der Milchstraße; die Nebel sind im Gegensatze dazu in der Milchstraße am seltensten, um so häufiger, je weiter sie von der Milchstraße abstehen, an den Polen der Milchstraße aber auf gleichen Flächen des Himmels mehr als dreißig mal häufiger, als in der Milchstraße[11]). Durch diese systematische, regelmäßige Anordnung in bezug auf die für unser Sternensystem charakteristische Milchstraße werden diese Gebilde wohl alle mit Bestimmtheit als Teile unseres Sternensystemes erwiesen und die zu einander räumlich komplementäre Anordnung beider Gebilde spricht gegen die Annahme, daß beide verschiedene Stadien derselben Entwickelung darstellen.

Nachdem die Sternhaufen und Nebel bei der Nachforschung nach außerhalb unseres Sternensystemes liegenden, ihm fremden Gebilden ausgeschieden sind, ergibt sich die folgende Antwort auf die zweite Frage: Wir wissen nichts von anderen Welten; wenn solche bestehen, so müssen sie von unserem Sternensysteme durch massenleere Räume getrennt sein, deren Ausdehnung gegen die Dimensionen unseres Sternensystemes gewaltig sein müßten, durch Räume, die kein Licht, keine Kraft, kein Existenzzeichen irgend welcher Art zu uns dringen ließen.

Wenn wir außerhalb unseres Sternensystemes noch andere Welten vermuten, so beruht das wesentlich darauf, daß wir uns den Raum unendlich groß zu denken gewöhnt sind, und daß wir etwas suchen, um die unfruchtbare unendliche Leere auszufüllen. Von Zweifeln an der Unendlichkeit des Raumes sind wir aber durchaus nicht frei: Ein unendlicher Raum, der mit anziehenden Massen besetzt ist, wenn auch nur in der Weise, daß ihn Sternensysteme von der Art des unsrigen in verhältnismäßig großen Entfernungen voneinander erfüllten, würde widersinnige mechanische Wirkungen ausüben, wenn das in den Grenzen unseres Sonnensystemes erprobte Gesetz der Anziehung richtig ist[12]). Damit sie vermieden würden, dürften sich die Massen nur über einen endlichen Teil des Raumes erstrecken, und dann bliebe die unendliche Leere, oder das ansprechend einfache Gesetz der Anziehung müßte geändert werden, was allerdings in wirksamer Weise geschehen kann, ohne unsere im beschränkten Gebiete unseres Sonnensystemes gewonnene Erfahrung zu trüben. Wichtiger aber erscheint die Schwierigkeit, daß die Erhaltungsgesetze für Energie und Materie, die in der Entwickelung unserer naturwissenschaftlichen Kenntnisse eine wichtige Rolle spielen, keine klare Bedeutung haben, wenn sie sich nicht auf geschlossene Systeme, also auf einen endlichen Raum beziehen, den wir in den konkreten Fällen der Anwendung wenigstens ideell herzustellen bemüht sind. Die von den Sternen eines jeden endlichen Systemes unaufhörlich geradlinig ausstrahlenden Mengen von Energie und Materie sind für das System im unendlichen Raume verloren, wenn sie auch in den von anderen Systemen zustrahlenden Mengen teilweise einen Ersatz finden. Diesen Bedenken gegen die Unendlichkeit des Raumes tritt die Befriedigung verstärkend hinzu, die es uns gewähren würde, wenn wir mit dem Raume das Gebiet unserer Forschungen als endlich betrachten dürften.

Was ist nun der Raum? In der unserer Organisation entsprechenden Auffassung ist er ein Gebilde, das nach drei Richtungen von unten nach oben, von rechts nach links und von hinten nach vorn völlig ausmessbar ist. Diese drei Richtungen oder Dimensionen sind für uns hinreichend und notwendig für eine erschöpfende geometrische Behandlung aller räumlichen Verhältnisse. Der Raum wird deshalb ein dreidimensionales Gebilde genannt. Wir haben die Fähigkeit, unsere Anschauung von drei auf zwei und eine Dimension zu beschränken. Eine im Raume liegende Fläche wird

zum Beispiel durch nur zwei Dimensionen gemessen. Wenn wir uns auf der Fläche, etwa der Oberfläche einer Kugel senkrecht stehend denken, wird sie allein durch die Richtungen von rechts nach links und von hinten nach vorn bestimmt, und wir können für die Veranschaulichung und die geometrische Behandlung der räumlichen Verhältnisse in der Fläche von der dritten Richtung von unten nach oben völlig absehen, also aus dem dreidimensionalen Raume einen zweidimensionalen Raum ausscheiden und unsere dreidimensionale Anschauungsform auf eine nur zweidimensionale und in ähnlicher Weise auch auf eine nur eindimensionale beschränken. Der umgekehrte Weg, den Raumbegriff zu erweitern und über die drei Dimensionen unserer Auffassung hinaus zu gehen, ist für uns aber nicht ganz frei. Nichts zwar hindert, die Geometrie auf Räume von beliebig vielen Dimensionen auszudehnen; die Fähigkeit, uns die geometrischen Verhältnisse zu veranschaulichen, fehlt uns aber — vielleicht nicht für immer — schon in dem Raume von vier Dimensionen.

Worauf beruht nun unsere Vorstellung, daß der Raum unendlich groß sei? Sie könnte entweder in der Erfahrung oder in einer Denknotwendigkeit für unseren Verstand wurzeln. Aus der Erfahrung aber kann die Vorstellung nicht unmittelbar fließen; über das Unendliche kann im endlichen Gebiete unserer Erfahrung nichts enthalten sein. Die Vorstellung eines unendlichen Raumes könnte also, insoweit die Erfahrung mitwirkt, nur durch eine Verallgemeinerung gewisser im Endlichen gewonnener Ergebnisse entstehen. Dann wäre aber die Berechtigung einer über alle Grenzen hinauswachsenden Verallgemeinerung, die durch keine Erfahrung geprüft werden könnte, zweifelhaft.

Die Frage aber, ob der unendlich große Raum eine Denknotwendigkeit für unseren Verstand sei, läßt sich nicht, wie man zu tun geneigt ist, durch die Untersuchung darüber entscheiden, ob wir uns eine Grenze des Raumes veranschaulichen können oder nicht. Denn, wenn wir auch unserer Unfähigkeit, uns eine Grenze des Raumes vorzustellen, entscheidende Kraft geben wollten, so würde daraus noch nicht folgen, daß der Raum unendlich groß sei. Daß die Begriffe „unbegrenzt“ und „endlich“ keine Gegensätze sind, zeigt, bei Beschränkung auf einen Raum von nur zwei Dimensionen der einfache, uns sofort anschauliche Fall der Oberfläche einer Kugel, die keine Grenzen hat und dennoch endlich ist. Ein

Wanderer kann auf der kugelförmig und meer- und bergelos gedachten Erde in allen Richtungen gehen, ohne auf eine Grenze zu stoßen und dennoch ist die unbegrenzte, in Quadratkilometern des Inhaltes angebbare Oberfläche der Kugel endlich.

Man muß an die Frage, ob wir gezwungen sind, den Raum unendlich groß anzunehmen, von einem ganz anderen Ausgangspunkte herantreten. Die von uns gewöhnlich angenommene Unendlichkeit des Raumes ist eine unvermeidliche Folge der Geometrie, die wir alle von Jugend auf, in ihren Elementen wenigstens, kennen und anwenden lernen. Diese Geometrie erscheint in ihren Grundlagen und Folgerungen notwendig und unerschütterlich und unsere Erfahrungen in dem gesamten Gebiete naturwissenschaftlicher Forschungen haben sie bisher vor jedem Zweifel an ihrer objektiven Richtigkeit geschützt. Man hat diese Geometrie in ihren des Beweises nicht bedürftig erscheinenden Grundlagen und in ihren daraus nach notwendigen Denkgesetzen gezogenen Folgerungen als eine Wissenschaft a priori betrachtet, als einen Besitz aus der göttlichen Abstammung unseres Geistes. Die Mathematik des verflossenen Jahrhunderts hat nun die Grundlagen der Geometrie geprüft, ursprünglich in der Absicht, sie zu befestigen und damit die Herrschaft der üblichen Geometrie als legitim zu erweisen. Es hat sich dabei gezeigt, daß in den Grundlagen der gewöhnlichen Geometrie eine unnötige Beschränkung eingeführt war. Diese Beschränkung ist beseitigt [13]) und zur Unterscheidung des Raumes von anderen Gebilden dreier Dimensionen dafür die Bedingung eingeführt worden, daß man in ihm feste Körper bei unveränderter Form in beliebiger Weise frei bewegen könne. Es hat sich daraus ergeben, daß unsere übliche Geometrie nur ein spezieller Fall einer allgemeiner möglichen Form ist. In den geometrischen Beziehungen der allgemeinen Form kommt eine gewisse konstante Größe, die sogenannte Krümmung, vor. Die speziellen Fälle scheiden sich aus der allgemeinen Form dadurch aus, daß die Krümmung einen bestimmten Wert annimmt. Unserer gewöhnlichen Geometrie gehört ein verschwindender Wert der Krümmung zu; sie nimmt also eine Mittelstellung unter den möglichen Formen ein, die durch positive oder negative Werte der Krümmung charakterisiert sind. Kein spezieller Wert der Krümmung kann aber a priori vorberechtigt erscheinen; nur die Erfahrung kann lehren, welcher Wert der Krümmung in der Geometrie des tatsächlich existierenden Raumes

gültig ist. Damit ist der Geometrie die Vorzugsstellung einer Wissenschaft a priori entrissen und ihr, als Wissenschaft der Erfahrung, ihre Stellung unter den anderen Wissenschaften dieser Art, der analytischen Mechanik und den exakten Naturwissenschaften angewiesen worden, unter denen sie allerdings als allzeit bereite mächtige Hülfswissenschaft eine hervorragende Stelle beanspruchen darf.

Den verschiedenen Formen der Geometrie entsprechen verschiedene Eigenschaften des Raumes, in dem sie gültig sind. Zur Herstellung der geometrischen Beziehungen in diesen Räumen, die man als Räume konstanter Krümmung bezeichnet, verbindet man die Punkte durch kürzeste Linien, wie sie auch in dem gewöhnlichen Raume in den dann gerade genannten Linien benutzt werden. Geht man in dem gewöhnlichen Raume von einem Punkte aus immer in der kürzesten, also in der geraden Linie in derselben Richtung fort, so entfernt man sich von dem Ausgangsorte immer mehr bis in das Unendliche. Geht aber unser Wanderer, der in seinem Wege an die Oberfläche der kugelförmigen Erde gebunden ist, gleichfalls in der kürzesten Linie in derselben Richtung weiter, so wandert er auf einem größten Kreise der Kugel; er entfernt sich von seinem Ausgangsorte nur, bis er die Hälfte des größten Kreises zurückgelegt hat, dann nähert er sich, indem er seinen Weg in derselben Richtung fortsetzt, seinem Ausgangsorte wieder, von der entgegengesetzten Seite und erreicht ihn nach Umkreisung der ganzen Erde.

Der Wanderer bedarf nun, um die geometrischen Verhältnisse auf der Kugeloberfläche erschöpfend zu behandeln, allein der zweidimensionalen Anschauungsform; die Veranschaulichung der dritten Richtung von unten nach oben ist für ihn ganz überflüssig. Geht nun unser, zum Landmesser umgewandelter, Wanderer an die Ausmessung kleiner Gebiete der Kugel, von Feldern, Stadtgebieten, heran, so findet er, daß die Formeln der gewöhnlichen Geometrie widerspruchlos anzuwenden sind; erst, wenn er größere Gebiete, ganze Länder, zu vermessen hat, wird er bemerken, daß seine Geometrie nicht stimmen will und daß er die erforderliche Übereinstimmung erst erreichen kann, wenn er statt der gewöhnlichen Geometrie die sphärische anwendet, die gleichfalls schon in unseren höheren Schulen gelehrt wird. Ja, er wird aus seinen Beobachtungen die Länge der in sich zurückkehrenden kürzesten Linien und den Halbmesser der Kugel zu bestimmen vermögen, der in die

Formeln der sphärischen Geometrie als unbekannte Größe eingeht. Alle diese geometrischen Operationen, besonders den Übergang von der gewöhnlichen zur sphärischen Geometrie, der in der geschichtlichen Entwickelung der Erdmessung tatsächlich erfolgt ist, würde unser Landmesser auch dann ohne jede Beschränkung, so gut, wie wir, auszuführen vermögen, wenn er nur die zweidimensionale Anschauungsform besäße. Eines würde er dann aber nicht können: er würde sich nicht anschaulich zu machen vermögen, wie alle kürzesten Linien in seinem unbegrenzten Gebiete nach ihrem Ausgangsorte zurückkehren und wie das unbegrenzte Gebiet seiner Vermessungen eine endliche Ausdehnung besitzen kann. Diese Zusammenhänge werden uns, bei unserer dreidimensionalen Anschauungsform erst dadurch klar, daß wir die Fähigkeit der Veranschaulichung auch der dritten Richtung von unten nach oben haben und uns die Kugel als ein im dreidimensionalen Raume liegendes geschlossenes zweidimensionales Gebilde anschaulich vorzustellen vermögen. Der Wanderer hat aber ersichtlicher Weise kein Recht, deshalb an der Richtigkeit seiner Ergebnisse zu zweifeln, weil er bei nur zweidimensionaler Anschauungsform die Fähigkeit nicht besitzt, sich Unbegrenztes als endlich zu veranschaulichen. Die widerspruchslose Durchführung der sphärischen Geometrie ist vielmehr ein vollgültiger Beweis für ihre Realität und die Existenz der Raumform, in der sie gültig ist.

Verallgemeinert man die hierdurch anschaulich gewordenen Verhältnisse im zweidimensionalen Raume auf den dreidimensionalen Raum unserer Anschauungsform, so ergibt sich das folgende Bild: Geht man, durch die Raumform gebunden, von einem beliebigen Ausgangsorte in irgend welcher Richtung in den Raum hinaus, immer weiter, so entfernt man sich zunächst von dem Ausgangsorte, bis man eine größte Entfernung erreicht hat; dann nähert man sich weiterschreitend dem Ausgangsorte von der entgegengesetzten Seite und kehrt schließlich zu ihm zurück, nachdem man einen Weg zurückgelegt hat, der für alle Richtungen dieselbe von der Beschaffenheit des Raumes abhängige Länge besitzt. In einem kleinen Gebiete des Raumes, das wir als neutrales bezeichen wollen, gilt die gewöhnliche Geometrie mit einer Genauigkeit, die gegenüber den unvermeidlichen Unsicherheiten der Beobachtungen ausreicht. Für größere Gebiete wird aber die gewöhnliche Geometrie unzulänglich und muß durch die sphärische Geometrie ersetzt

werden. Aus Beobachtungen in diesem Raume, die das neutrale Gebiet überschreiten, ist man im Stande, die Länge des zurückführenden Weges zu ermitteln.

Die dreidimensionalen Räume, in denen diese Geometrie tatsächlich gilt, sind die Räume konstanter positiver Krümmung. Das Wichtigste für uns ist, daß diese Räume, obwohl sie grenzenlos sind, dennoch eine endliche Ausdehnung haben, während die Räume konstanter negativer Krümmung, wie der gewöhnliche Raum, unendlich groß sind.

Wir haben nun die uns als Ausgang für die Verallgemeinerung dienende Skizze der Verhältnisse im zweidimensionalen Raume in allen Zügen dadurch zu unserer Anschauung bringen können, daß wir die dreidimensionale Anschauungsform besitzen. Entsprechend müßten wir die Fähigkeit der vierdimensionalen Anschauung haben, um uns die Zusammenhänge auch anschaulich vorzustellen, die dazu führen, daß im dreidimensionalen Raume die kürzesten Linien in sich zurückkehren und der Raum selbst unbegrenzt und endlich ist. Aus dem Mangel dieser Fähigkeit kann aber, wie das Analogon des zweidimensionalen Raumes zeigt, ein Zweifel an der Existenz eines endlichen Raumes dann nicht abgeleitet werden, wenn uns die Erfahrung lehren sollte, daß die sphärische Geometrie in dem Raume gilt. Und ein solcher Zweifel wäre um so weniger berechtigt, als sich auch die unendliche Ausdehnung der anderen Räume unserer Anschauung völlig entzieht und uns nur die Gewohnheit abhält, hierin auch bei dem gewöhnlichen Raume einen Mangel zu empfinden.

Die Unendlichkeit des Raumes ist also keine Denknotwendigkeit für unseren Verstand.

Kann nun der wirklich existierende Raum eine endliche Ausdehnung, vielleicht eine so geringe haben, daß außer unserem Sternensysteme nichts darin Platz fände?

Unsere Erfahrungen in dem Sonnensysteme können bei der Beantwortung dieser Frage nicht mitsprechen. Der Umstand, daß wir die geometrischen Verhältnisse im Sonnensysteme ausreichend mit der gewöhnlichen Geometrie beherrschen, beweist nur, daß das Sonnensystem ganz im neutralen Gebiete liegt. Damit scheidet aber nur ein verschwindend kleiner Teil des von den Sternen erfüllten Raumes aus; in dem Gebiete der Sternenwelt muß die Entscheidung fallen. Wir sind nun noch weit davon entfernt, über

Messungen zu verfügen, die eine bestimmte Antwort auf die entscheidende Frage gestatteten, ob in diesem weiten Gebiete die gewöhnliche Geometrie nicht gelte, deren Gültigkeit bisher stillschweigend angenommen worden ist, unter anderem auch bei der Ableitung der Ergebnisse über die Beschaffenheit des Sternensystemes, von denen ich vorher gesprochen habe. In dem Interesse, das wir an der Endlichkeit des Raumes gewonnen haben, können wir uns zunächst nur die Frage stellen, ob und unter welchen Beschränkungen die Endlichkeit des Raumes mit unseren gegenwärtigen physikalischen und statistischen Erfahrungen vereinbar sei, die immerhin vielleicht schon jetzt unüberwindliche Widersprüche ergeben könnten.

Dafür muß das bisher nur in geometrischer Beziehung skizzierte Bild des endlichen Raumes in physikalischer Beziehung vervollständigt werden. Es ist erfahrungsgemäß anzunehmen, daß die von den Körpern ausstrahlenden Energien von Kraft, Licht, Wärme, Elektrizität in kürzesten Bahnen, im endlichen Raume also in geschlossenen Linien wandern, solange sie nicht durch Hindernisse abgelenkt werden. Das hieraus folgende Bild des Himmels soll zunächst unter der auf ihre Berechtigung zu prüfenden Annahme geschildert werden, daß das Licht auf seiner Wanderung durch den Weltraum keine Absorption erleide.

Denken wir uns zuerst die Sonne und die Erde im Raume ruhend und die Leuchtkraft der Sonne als unveränderlich. Die Sonne strahlt uns direkt Licht zu, das uns in 8 Minuten erreicht; das in der entgegengesetzten Richtung von der uns abgewandten Seite der Sonne ausstrahlende Licht dringt in den Weltraum ein, durchwandert einen bestimmten Weg von endlicher Länge, den Lichtkreis, und kehrt nach Verlauf einer gewissen Zeit, der Umlaufszeit, zur Sonne zurück, um seinen Kreislauf aufs Neue anzutreten; 8 Minuten vorher aber passiert dieses Licht, das den ganzen Weltraum durchquert hat, die Erde und wird von uns aus einer Richtung kommend gesehen, die der direkten Richtung nach der Sonne genau entgegengesetzt ist. Das Licht nimmt dabei an Helligkeit anfänglich ab, bis es die Hälfte des Lichtkreises durchwandert hat, dann nimmt es, indem es sich der Sonne wieder nähert, zu und erreicht sie mit ungeschwächter Helligkeit[14]). Wir sehen deshalb am Himmel der Sonne genau diametral gegenüber ein Gegenbild der Sonne, das, wie die perspektivischen Gesetze fordern, die gleiche Größe und Helligkeit hat, wie das direkte Bild.

Wir haben dann eine Sonne des Tages und eine gleiche der ihren Namen dann nicht verdienenden Nacht[15]). Wir wissen nun aber, daß, im Widerspruche mit unserer Annahme weder die Sonne noch die Erde im Raume ruhen. Die Bewegung der immer in der Nähe der Sonne bleibenden Erde hat nur geringen Einfluß auf die Lage und das Aussehen des Gegenbildes; die Bewegung der Sonne aber, die jetzt mit einer Geschwindigkeit erfolgt, die den 10000sten Teil der Geschwindigkeit des Lichtes beträgt, ruft in dem Gegenbilde der Sonne wesentliche Veränderungen hervor. Die von der Sonne zu einer bestimmten Zeit an einem bestimmten Ausgangsorte ausgesandten Lichtstrahlen bleiben nämlich, wie die von einem fahrenden Schiffe erregten Wellen, an den Raum gebunden zurück und nehmen an der Bewegung der Sonne ebensowenig Teil, wie die Wellen an der Bewegung des Schiffes. Das von dem Ausgangsorte nach allen Richtungen ausstrahlende Licht kehrt also nach der Umlaufszeit von allen Richtungen her nach dem Ausgangsorte zurück, von dem sich die Sonne inzwischen durch ihre Bewegung im Raume entfernt hat. Die Sonne geht, in welcher Richtung sie sich auch bewege, dem zurückkehrenden Lichte stets entgegen und trifft es in einer um so größeren Entfernung von dem Ausgangsorte, je länger der Lichtkreis und je größer dementsprechend die Umlaufszeit des Lichtes ist. Wir sehen nun nach den perspektivischen Gesetzen von der durch die Sonne mitgeführten Erde aus das durch das zurückkehrende Licht erzeugte Gegenbild in solcher Größe und Helligkeit, wie uns die Sonne in der entgegengesetzten Richtung erscheinen würde, wenn sie am Ausgangsorte stehen geblieben wäre, also der Entfernung dieses Ortes entsprechend kleiner und dunkler. Schon bei der geringsten Ausdehnung, die der Raum haben muß, um das Sternensystem aufnehmen zu können, verwandelt sich so das sonnengleiche Gegenbild, das der Sonne im Ruhezustande zugehört, durch die Bewegung der Sonne in einen der Richtung nach dem Ausgangsorte entgegengesetzt liegenden Stern, der wenn das Licht keine Absorption erleidet ungefähr so hell ist, wie der hellste Stern des Himmels, Sirius[16]). Je größer aber die Ausdehnung des Raumes ist, desto schwächer wird der das Gegenbild der Sonne darstellende Stern.

Das Licht, das nach einem Umlaufe aus allen Richtungen her zum Ausgangsorte zurückgekehrt ist, beginnt seinen Kreislauf von diesem selben Orte aus aufs Neue; es strahlt also einerseits

der mit der Sonne weiter wandernden Erde direkt nach und indirekt entgegen, nachdem es noch einmal den Weltraum durchquert hat. Durch das direkte Licht erhalten wir zuerst ein zweites sternartiges Bild der Sonne, schwächer als das erste Gegenbild und später durch das indirekte Licht ein zweites nochmals schwächeres Gegenbild. Jedem der unaufhörlich erneuten Umläufe des Lichtes entspricht in der gleichen Weise ein neues Paar eines Bildes und Gegenbildes. Gleichzeitig bieten uns diese zu verschiedenen Zeiten entstandenen sternartigen Bilder und Gegenbilder der Sonne, mit Ausschluß des ersten gewöhnlichen Bildes, den Anblick von zwei Ketten regelmäßig angeordneter Sterne dar, die sich am Himmel um so näher diametral gegenüberliegen und um so dichter mit Sternen besetzt sind, je weniger die Bewegung der Sonne von einer kürzesten Linie abweicht. Die Helligkeit der Sterne wechselt je nach der Entfernung der Sonne vom Ausgangsorte des Lichtes und je nach der Änderung der bisher von uns als unveränderlich angenommenen, tatsächlich aber sicher veränderlichen Leuchtkraft der Sonne. Die Zahl der bestehenden Objekte der Ketten müßte unendlich groß sein, wenn die Sonne seit undenklichen Zeiten besteht; die Zahl der sichtbaren Sterne brauchte aber bei zunächst abnehmender Helligkeit nur mäßig groß auszufallen Was bei der Sonne, dem nächsten Sterne geschieht, wiederholt sich bei jedem anderen Sterne: bei Bild und Gegenbild des Sternes bilden sich Sternketten, von denen sich aber auch das erste Bild nicht ausschließt, und nur, wenn der Stern sich im Raume gar nicht bewegt, ziehen sich alle Objekte einer Kette auf einen Punkt zusammen.

Von dem symmetrischen Anblicke, den der Himmel bei der Existenz dieser nahezu diametralen Ketten von Bildern und Gegenbildern gewähren müßte, bemerken wir nun nichts. Daraus ist aber nicht zu schließen, daß der Raum nicht endlich sein könnte. Denn unser Bild ist unter der der Prüfung bedürftigen Annahme gewonnen worden, daß das Licht auf seinem Wege durch den Weltraum keine Absorption erleide. Diese Annahme, wonach das Licht, wenn es nicht von Körpern aufgefangen wird, periodisch zu seinem ursprünglichen Ausgangsorte zurückkehrend, den Weltraum ewig in ungeschwächter Stärke durchfluten müßte, ist aber äußerst unwahrscheinlich. Unsere Erfahrungen zeigen uns vielmehr, daß alle Bewegungen, indem ihre Energie, meist durch Reibung, eine

andere Form annimmt, allmählich verschwinden. Es ist dementsprechend anzunehmen, daß auch das Licht, daß durch eine Wellenbewegung entsteht, durch Absorption mit der Zeit immer schwächer werde, wie Licht, das neblige Luft durchdringt. Wir wissen, daß bei einer solchen Absorption die Geschwindigkeit des Lichtes unverändert bleibt. Wenn man die Absorption stark genug wählt, kann man sich von den Schwierigkeiten selbst schon des ersten Gegenbildes, und um so mehr von der der Sternketten befreien. Es würde aber bei der Wahl der Stärke der Absorption der Willkühr Tür und Tor geöffnet sein, wenn nicht ein Umstand die Überschreitung eines gewissen Maßes verhinderte. Da nämlich das Licht durch die Absorption in einem mit der Länge des Weges sehr rasch zunehmenden Grade geschwächt wird, so müssen die Sterne an einer bestimmten Stelle des Raumes, um uns an einer Stelle des Himmels in einer bestimmten, beobachteten Fülle zu erscheinen, auch schon im gewöhnlichen Raume, um so dichter beieinander stehen und um so heller sein, je größer die Absorption ist. Und bei einer fest angenommenen Stärke der Absorption wächst diese Vergrößerung der Dichtigkeit und Helligkeit der Sterne sehr stark mit der Entfernung der Stelle des Raumes, an der sich die Sterne befinden. Je stärker also die Absorption angenommen wird, desto mehr wächst die Schwierigkeit, daß bei angenommenem Mischungsverhältnisse der Leuchtkraft der Sterne in großen Entfernungen die Dichtigkeit der Sterne stark wüchse und daß die Grenzen des Sternensystemes mit einem ganz unwahrscheinlichen jähen Sprunge aus einem mit Massen dicht erfüllten Raume in die massenlose Leere erreicht werden. Zwischen dem Zuviel und Zuwenig in der Absorption den Weg suchend, habe ich es unter der früheren Voraussetzung über das Mischungsverhältnis und bei Anwendung der Geometrie des endlichen Raumes zunächst als höchst unwahrscheinlich erkannt, daß das Sternensystem den endlichen Raum vollständig ausfüllte, weil sonst die Dichtigkeit der Sterne nach den Grenzen zu viel zu stark, in der Milchstraße bis zum 3000fachen anschwellen müßte[17]). Bei der geringsten Ausdehnung des endlichen Raumes, die mir möglich erscheint, bestehen die folgenden Verhältnisse: Der Inhalt des ganzen Raumes ist 17 mal größer, als der einer das Sternensystem soeben einschließenden Kugel. Die Durchmesser des Sternensystemes sind auf etwa $^4/_{10}$ der im gewöhnlichen unendlichen Raume

gefundenen Größen verringert, die Zahl der Sterne aber unverändert geblieben; die Gestalt des Systemes ist weniger flach gedrückt, der Kugel ähnlicher. Die Dichtigkeit der Sterne nimmt in der Richtung der Milchstraße von innen nach außen stets und mäßig zu, mit Ausschluß der Umgebung der Sonne, bis zum 10fachen; senkrecht zur Milchstraße ist die Dichtigkeit innen und außen nahe gleich groß, dazwischen in mäßigem Grade geringer. Das Licht kehrt nach 8700 Jahren wieder und die Absorption bewirkt auf jeden Umlauf einen Helligkeitsverlust des Lichtes im Betrage von 13 Größenklassen. Das erste Gegenbild der Sonne, das neben dem ersten direkten Bilde der Sonne als einziges sichtbares Objekt übrig bleibt, ist bei konstanter Leuchtkraft der Sonne ein Stern 10. Größe in der Entfernung von $^1/_5$ der jetzt als geringsten bekannten Entfernung eines Sternes. Da wir die Gesetze der Bewegung der Sonne im Raume noch nicht kennen, ist der Ort dieses Gegenbildes gleichfalls unbekannt. Von den ersten Gegenbildern der Sterne könnten höchstens bei ganz wenigen der allerhellsten schwache Spuren an gleichfalls unbekannten Orten übrig bleiben. Die Sternketten aber verschwinden spurlos.

Dieses Bild enthält keinen Zug, der als unwahrscheinlich bezeichnet werden könnte. Einer weiteren Vergrößerung der für dieses Bild angenommenen Ausdehnung des Raumes steht noch weniger irgend etwas im Wege; man wird sie allerdings nur so weit treiben, daß man die bei unserem Bilde bestehende Sicherheit bewahre, daß unser Sternensystem das Einzige sei, was im Raume existiere, das Universum. Aber nur für die Möglichkeit, noch nicht für die Wirklichkeit des endlichen Raumes spricht das Bild, und noch fehlt uns jedes Zeugnis für diese Wirklichkeit. Wie aber ursprünglich alle Vermessungen auf der Erdoberfläche auf kleinen Gebieten mit Hülfe der gewöhnlichen Geometrie widerspruchsfrei ausgeführt worden sind und erst die größeren Ausdehnungen der vermessenen Gebiete die Einführung einer anderen Form der Geometrie erzwungen haben, so kann sich, was hier im zweidimensionalen Gebiete geschehen ist, im dreidimensionalen Raume wiederholen, wo wir zunächst noch ein kleines Gebiet ausreichend mit der gewöhnlichen Geometrie beherrschen. Die Änderung kann durch Erweiterungen unserer jetzigen Kenntnisse über die geometrischen und mechanischen Verhältnisse des Sternensystemes nötig werden; in wirksamer Kraft sind diese Erweiterungen aber erst von der

Arbeit mehrerer Jahrtausende zu erhoffen. Die Änderung könnte aber vielleicht schon viel früher durch die Auffindung eines etwa wirklich in sichtbarer Helligkeit existierenden und als solches, etwa durch seine geringe Entfernung, erkennbaren sternartigen Gegenbildes der Sonne herbeigeführt werden. Niemand aber, der die schier unbegrenzten Möglichkeiten kennt, die uns die Natur enthüllt, wenn wir ihr auf ihren Wegen folgen, kann sich vermessen, die Entscheidung auf die genannten zwei Möglichkeiten zu beschränken. Und während wir uns nur erst um die Möglichkeit eines endlichen Raumes bemühen, kann auf anderen Planeten, in anderen Sonnensystemen in der Kultur vor uns bevorzugter Wesen die Erkenntnis der Endlichkeit des Raumes längst zu den sicheren Ergebnissen der Wissenschaft gehören.

Anmerkungen.

[1]) H. Kobold, Der Bau des Fixsternsystems, Braunschweig 1906, S. 146 u. f.

[2]) J. C. Kapteyn, Star streaming, Report of the seventy-fifth meeting of the British Association for the advancement of science. South Africa 1905. London 1906, S. 257 u. f.

[3]) F. W. A. Argelander, Bonner Sternverzeichnis, Astronomische Beobachtungen auf der Sternwarte zu Bonn Bd. 3, 4, 5, Bonn 1859, 61, 62; Fortsetzung von E. Schönfeld, ebenda Bd. 8, Bonn 1886. (Bonner Durchmusterungen.) D. Gill und J. C. Kapteyn, The Cape Photographic Durchmusterung, Annals of the Cape Observatory V. 3, 4, 5, London 1896, 97, 1900. — J. M. Thome, Resultados del Observatorio Nacional Argentino, V. 16, 17, 18, Buenos Aires 1892, 94, 1900. — Bearbeitet sind nur die Ergebnisse der Bonner Durchmusterungen, besonders von H. von Seeliger: Verteilung der Sterne auf der nördlichen Halbkugel nach der Bonner Durchmusterung, Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der k. b. Akademie der Wissenschaften, Bd. 14, München 1884. — Verteilung der Sterne auf der nördlichen Halbkugel nach Schönfelds Durchmusterung, ebenda, Bd. 16, 1886. — Zur Verteilung der Fixsterne am Himmel, ebenda, Bd. 19, 1900. — Betrachtungen über die räumliche Verteilung der Fixsterne, Abhandlungen der k. bayer. Akademie der Wissenschaften, II. Cl., Bd. 19, Abt. 3, München 1898. —

[4]) Die Sternaichungen von W. und J. Herschel. — E. S. Holden, The star-gauges of William Herschel, Publications of the Washburn Observatory, V. II. Madison 1884. — J. Herschel, Results of astronomical observations made 1834—38 at the Cape of Good Hope, London 1847. — Die Größenklasse, bis auf die diese Sternaichungen gehen, ist etwas unsicher; die angegebene Zahl 14.0 ist eine der Wahrheit wahrscheinlich sehr nahe kommende Vermutung.

[5]) Herr von Seeliger in der letzten unter [3]) angeführten Arbeit, S. 593. Durch Hinzuziehung der Zählungen des Herrn G. Celoria (Sopra alcuni scandagli del cielo e sulla distribuzione generale delle stelle nello spazio, Pubblicazioni del Reale Osservatorio di Brera in Milano, V. 13, Milano 1877), die allerdings nur einen kleinen Teil des Himmels decken, wird die untere in Größenklassen ausgedrückte Grenze des Intervalles, in dem der Sprung erfolgt, auf etwa 11.5 erhöht.

[6]) [7]) Beide Annahmen hat Herr von Seeliger in der letzten der unter [3]) genannten Arbeiten (S. 601 u. 611) eingeführt.

[8]) Herr von Seeliger teilt den Himmel, parallel der Milchstraße, in sieben je 20^0 breite Zonen und zwei Calotten von 20^0 Halbmesser um die Pole der Milchstraße ein.

[9]) Herrn von Seeligers Rechnungen beruhen nur auf dem Materiale der Bonner Durchmusterungen und der Herschelschen Sternaichungen; sie finden sich in den zwei letzten der unter [3]) angeführten Arbeiten. Ich habe die kleine Umrechnung der Resultate der zuletzt genannten Arbeit, mit Berücksichtigung der systematischen Verbesserungen vorgenommen, die in der an vorletzter Stelle angeführten, späteren Arbeit abgeleitet worden sind. Bei Anschließung an die Seeligersche Bezeichnung ergaben sich dann aus den Werten von λ, $\frac{H}{D}$ und dem Werte $m = 14.0$, die in der nachstehenden Tabelle aufgeführten Werte von n, A_∞, r_n, L, Δ

Zone	λ	$\frac{H}{D}$	n	A_∞	r_n	L	Δ
Polarcalotten I, IX	0,82	46.2	12.41	0.31	157000000	2480	11.2
II, VIII	0.72	61.5	12.54	1.28	167000000	2630	8.8
III, VII	0.49	79.8	12.40	3.41	156000000	2470	4.2
IV, VI	0.36	113.8	12.53	9.73	166000000	2620	3.0
Milchstraße V	0.28	275.4	13.28	20.59	235000000	3700	2.6

Die Einheit bei den Werten A_∞, die die Anzahl aller Sterne der betreffenden Zone darstellen, ist die Million. Die Werte von r_n stellen die Entfernungen der Grenze in Einheiten der Entfernung der Erde von der Sonne dar. Sie sind aus den Werten n der Größe, die ein Stern von der höchsten Leuchtkraft an der Grenze hat, unter der Voraussetzung berechnet worden, daß ein solcher Stern bei einer Parallaxe von 1″ der Größe —2.0 zugehöre, und daß die Helligkeit, ohne Absorption, wie die reciproke zweiter Potenz der Entfernung abnehme. Die entsprechende Formel ist

$$r_n = \varrho a^{\frac{n}{2}+1}, \quad \varrho = 206265, \quad \log_{br} a = 0.4.$$

Die Größen L sind die Werte von r_n in Einheiten des Lichtjahres ausgedrückt. Für die Dichtigkeit D der Sterne in der Entfernung r gilt die Formel

$$D = \gamma r^{-\lambda}$$

in der γ nur von der Neigung der jeweilig betrachteten Richtung gegen die Milchstraße abhängt. Bei der Vergleichung der Dichtigkeiten in derselben Richtung schließen wir die Sterne innerhalb einer Kugel aus, auf deren Oberfläche ein Stern von der höchsten Leuchtkraft die Größe 6.0 haben würde. Das in der Tabelle mit angegebene Verhältnis Δ der Dichtigkeit der Sterne auf der Oberfläche dieser Kugel zu der an der Grenze geltenden ist also nach der Formel

$$\Delta = a^{\left(\frac{n}{2}-3\right)\lambda}$$

zu berechnen.

[10]) Man vergleiche die Behandlung des Problemes im Raume von konstanter positiver Krümmung unter [17]).

[11]) W. Stratonoff, Etudes sur la structure de l'Univers, Publications de l'Observatoire de Tachkent No. 2, 3 mit Atlas, Tachkent 1900, 01. Besonders kommt No. 2, S. 38 u. f. in Frage.

[12]) H. von Seeliger, Über das Newtonsche Gravitationsgesetz, Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der k. b. Akademie der Wissenschaften, Bd. 26, München 1897.

[13]) Aus der umfangreichen Literatur der durch die Beseitigung des Parallelenaxiomes erlangten Geometrie der Räume von konstanter Krümmung möge wenigstens eine Arbeit genannt werden: E. Beltrami, Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante, Annali di matematica pura ed applicata, serie II, V. 2, Roma 1869.

[14]) Nach dem Analogon der Kugel würden sich je zwei kürzeste Linien, die von einem Punkte ausgehen, erst noch in dem fernsten Punkte schneiden, ehe sie zum Ausgangspunkte zurückkehren. Diese Annahme, die für den „sphärischen Doppelraum" gilt, ist aber unnötig. Wir werden im Folgenden den „elliptischen" Raum annehmen, in dem sich zwei kürzeste Linien erst im Ausgangspunkte wieder treffen.

[15]) Man würde, wenn das richtig wäre, versucht sein, in dem „Gegenscheine" die zerstreuten Reste des aus dem Weltraume zurückkehrenden Sonnenlichtes zu erblicken.

[16]) steht hinter [17]).

[17]) Die Umarbeitung der von Herrn von Seeliger in der letzten der unter [3]) angeführten Arbeiten vorgenommenen Entwickelungen auf die Geometrie des Raumes von der konstanten positiven Krümmung $\frac{1}{R^2}$ gestaltet sich bei der Berücksichtigung der Absorption folgendermaßen: Vom Beobachtungsorte aus erstrecke sich der durch kürzeste Linien begrenzte Elementarkegel von der sehr kleinen Öffnung ω in einer bestimmten Richtung. Dieser Kegel werde durch eine Kugel geschnitten, die mit dem in einer kürzesten Linie gemessenen Halbmesser r um den Beobachtungsort beschrieben wird. Das durch den Kegel ausgeschnittene Element der Kugeloberfläche hat den Flächeninhalt $\omega R^2 \sin^2 x$, indem zur Abkürzung $x = \frac{r}{R}$ eingeführt wird. Das räumliche Element $d\tau$ über dem Oberflächenelemente hat bei einer Höhe dr den Inhalt $d\tau = \omega R^3 \sin^2 x dx$. Die Leuchtkraft eines Sternes, d. h. seine Helligkeit in der Entfernung 1, die gegen die Dimensionen des Sternes sehr groß, gegen R aber außerordentlich klein ist, sei i; dann hat der Stern in der Entfernung r die Helligkeit h, die durch die Formeln

$$h = \frac{i}{s^2}, \quad s = R \sin x e^{kx}$$

bestimmt ist. Die positive Konstante $\frac{2k}{R}$ stellt dabei den Absorptionscoefficienten dar. Der größte vorkommende Wert von i sei J; dementsprechend ist die Helligkeit H, die ein Stern von der größten vorkommenden Leuchtkraft in der Entfernung r hat, bestimmt durch

$$H = \frac{J}{s^2}.$$

Die Zahl der in der Raumeinheit enthaltenen Sterne sei D; die Zahl derjenigen dieser Sterne, die eine Leuchtkraft zwischen i und $i + di$ haben, sei $D\varphi(i)\,di$,

wobei $\varphi(i)$ die „Häufigkeitsfunktion“ ist, für die die Bedingung

$$\int_0^J \varphi(i)\, di = 1$$

besteht. Im Raumelemente $d\tau$ gibt es also $D\varphi(i)\, didd\tau$ Sterne von einer zwischen i und $i + di$ liegenden Leuchtkraft oder $Ds^2\, \varphi(hs^2)\, dhd\tau$ Sterne von einer zwischen h und $h + dh$ liegenden Helligkeit. Die Zahl der Sterne im Raumelemente $d\tau$ deren Helligkeiten zwischen einer beliebigen unteren Grenze h_m und der Maximalhelligkeit H liegen, ist also

$$\text{a)} \quad \omega R^3\, Ds^2 \sin^2 x\, dx \int_{h_m}^{H} \varphi\,(hs^2)\, dh.$$

Das Sternsystem habe nun in der gewählten Richtung seine Grenze bei $r = r_n$; dann ist die Helligkeit H_n eines Sterns von der größten Leuchtkraft, der an der Grenze steht, bestimmt durch

$$H_n = \frac{J}{s_n^2}.$$

Um nun die Zahl A_m aller Sterne zu erhalten, von den hellsten bis zur Helligkeit h_m herab, die auf der Fläche ω der Einheitskugel gesehen werden, ist der Ausdruck a) nach x zu integrieren von der unteren Grenze x_0 an, die sich aus der geringsten Entfernung r_0 eines Sternes in der gewählten Richtung durch die Formel $x_0 = \frac{r_0}{R}$ ergibt, bis zu einer oberen Grenze, die verschieden ist, je nachdem bei der Helligkeit h_m die raumerweiternde Kraft des Fernrohrs noch wirksam oder schon erschöpft ist. Im ersten Falle ist $h_m \geqq H_n$ und die obere Grenze x_m ist die Wurzel der Gleichung

$$h_m = \frac{J}{s_m^2}.$$

Im zweiten Falle ist $h_m \leqq H_n$ und die obere Grenze ist $x_n = \frac{r_n}{R}$. Den zwei Fällen entsprechend ist also

$$A_m = \omega R^3 \int_{x_0}^{x_m} D \sin^2 x\, dx \int_{h_m s^2}^{J} \varphi(i)\, di \quad , \quad h_m \geqq H_n$$

$$A_m = \omega R^3 \int_{x_0}^{x_n} D \sin^2 x\, dx \int_{h_m s^2}^{J} \varphi(i)\, di \quad , \quad h_m \leqq H_n .$$

Führt man anstatt x die Größe s als Integrationsvariabele ein, so ergibt die Auflösung von

$$\sin x e^{kx} = \frac{s}{R}$$

nach x zunächst

$$x = f\left(\tfrac{s}{R}\right)$$

und sodann

$$dx = f'\left(\tfrac{s}{R}\right) \frac{ds}{R}$$

wobei

$$f'\left(\tfrac{s}{R}\right) = \frac{e^{-kx}}{\cos x + k \sin x}$$

ist.

Damit erhält man die transformierten Formeln

$$A_m = \omega \int_{s_0}^{\sqrt{\frac{J}{h_m}}} D^1 s^2 \, ds \int_{h_m s^2}^{J} \varphi(i) \, di \quad , \quad h_m \geqq H_n$$

$$A_m = \omega \int_{s_0}^{\sqrt{\frac{J}{H_n}}} D^1 s^2 \, ds \int_{h_m s^2}^{J} \varphi(i) \, di \quad , \quad h_m \leqq H_n .$$

Zur Abkürzung ist dabei

$$s_0 = R \sin x_0 \, e^{k x_0}$$

und

$$D^1 = R^2 \frac{D \left(\sin f \left(\frac{s}{R} \right) \right)^2 \cdot f' \left(\frac{s}{R} \right)}{s^2} = \frac{D e^{-3kx}}{\cos x + k \sin x}$$

gesetzt worden.

Die Formeln für A_m stimmen in der Gestalt völlig mit den Formeln I, II überein, die Herr von Seeliger auf S. 595 der letzten unter [3]) angeführten Arbeit angibt. Es steht nur D^1 statt D und s statt r. Mit der ersten Formel, die gültig bleibt, so lange die raumerweiternde Kraft des Fernrohres noch nicht erschöpft ist, kann man dann weiter die von Herrn von Seeliger auf den Seiten 601 u. f. vorgenommene Operation ausführen. Es ist aber an jener Stelle stillschweigend vorausgesetzt worden, daß $\varphi(i)$ von r unabhängig sei, daß also das Mischungsverhältnis für alle Stellen des Sternsystems das gleiche sei. Denn nur dann gilt für das Integral

$$u = \int_{h_m s^2}^{J} \varphi(i) \, di$$

die Gleichung

$$\frac{du}{dh_m} = \frac{s}{2h_m} \frac{du}{ds} .$$

Aus der Gleichung

$$A_m = \omega \int_{s_0}^{\sqrt{\frac{J}{h_m}}} D^1 s^2 \, u \, ds \quad , \quad h_m \geqq H_n$$

ergibt sich dann, indem man s_0 als äußerst klein betrachtet

$$\frac{dA_m}{dh_m} = - \frac{\omega}{2h_m} \int_0^{\sqrt{\frac{J}{h_m}}} u \, \frac{d\,(D^1 s^3)}{ds} \, ds$$

$$= - \frac{3}{2h_m} A_m - \frac{\omega}{2h_m} \int_0^{\sqrt{\frac{J}{h_m}}} s^3 \frac{d\,D^1}{ds} \, u ds$$

Das Resultat

$$A_m = c \, h_m^{\frac{\lambda - 3}{2}}$$

ist nun von Herrn von Seeliger rein statistisch, ohne irgend welche Voraussetzung über die Beschaffenheit des Raumes erhalten worden. Daraus folgt ein zweiter Wert von $\frac{dA_m}{dh_m}$ der, dem ersten gleich gesetzt, zeigt, daß

$$\frac{\omega}{2h_m}\int_0^{\sqrt{\frac{J}{h_m}}}\left(\lambda D^1 + s\frac{dD^1}{ds}\right) s^2 u\, Ds = 0$$

sein muß. Daraus schließt man, daß

$$D^1 = \gamma s^{-\lambda}$$

sein müsse. Für die Dichtigkeit D gilt also die Gleichung

$$\frac{R^\lambda D}{\gamma} = f(x) = \frac{\cos x + k \sin x}{\sin^\lambda x}\, e^{(3-\lambda)kx}.$$

Die Formel

$$f'(x) = \frac{((3-\lambda)\, k^2-1)\, \operatorname{tg}^2 x + 2k\, (2-\lambda) \operatorname{tg} x - \lambda}{\sin^{\lambda+1} x} \cos^2 x\, e^{(3-\lambda)kx}$$

lehrt, daß D für kleine wachsende Werte von x abnimmt, bis es, vorausgesetzt daß $k^2 \geqq \frac{\lambda}{4-\lambda}$ ist, wie es für die folgenden numerischen Rechnungen zutrifft, für

$$\operatorname{tg} x = \frac{-(2-\lambda)\, k + \sqrt{(4-\lambda)\, k^2-\lambda}}{(3-\lambda)\, k^2-1} = \frac{\lambda}{(2-\lambda)\, k + \sqrt{(4-\lambda)\, k^2-\lambda}}$$

ein Minimum erreicht. Dann nimmt D zu und erreicht ein Maximum für

$$\operatorname{tg} x = \frac{-(2-\lambda)\, k - \sqrt{(4-\lambda)\, k^2-\lambda}}{(3-\lambda)\, k^2-1} = \frac{\lambda}{(2-\lambda)\, k - \sqrt{(4-\lambda)\, k^2-\lambda}}.$$

Im sphärischen Raume sind die Entfernungen kleiner oder gleich πR, der Umfang des Lichtkreises gleich $2\pi R$. Da in ihm negative Werte von $\operatorname{tg} x$ möglich sind, so besteht stets sowohl das Minimum als das Maximum für D. Überdies verschwindet D für $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{k}$ und erhält für größere Werte von x bis $x = \pi$ unmögliche negative Werte.

Die nachfolgenden Rechnungen sind für den elliptischen Raum ausgeführt, in denen die Entfernungen r kleiner oder gleich $\frac{\pi}{2} R$, der Umfang des Lichtkreises gleich πR ist. Dann sind negative Werte von $\operatorname{tg} x$ ausgeschlossen; das Minimum von D ist immer möglich, wenn nur $k^2 \geqq \frac{\lambda}{4-\lambda}$ ist, das Maximum von D aber ist unmöglich oder möglich, je nachdem $k^2 > \frac{1}{3-\lambda} > \frac{\lambda}{4-\lambda}$ oder $\frac{1}{3-\lambda} > k^2 > \frac{\lambda}{4-\lambda}$ ist. Der Wert von $f(x)$ im fernsten Punkte ist

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k e^{(3-\lambda) k \frac{\pi}{2}}$$

und D bleibt stets positiv.

Um die Lage des Sprunges in der Sternzahl zu bestimmen, nehmen wir mit Herrn von Seeliger an, daß das Mischungsverhältnis gleichmäßig, als 0

$$\varphi(i) = \frac{1}{J}$$

sei. Dann wird

$$A_m = \gamma\omega \frac{2}{(3-\lambda)\ (5-\lambda)} \sqrt{\left(\frac{J}{h_m}\right)^{3-\lambda}} \quad , \ h_m \geqq H_n$$

$$A_m = \gamma\omega \frac{5-\lambda - \frac{h_m}{H_n}(3-\lambda)}{(3-\lambda)\ (5-\lambda)} \sqrt{\left(\frac{J}{H_n}\right)^{3-\lambda}} \quad , \ h_m \leqq H_n$$

und im Besonderen ergibt die letzte Formel

$$A_\infty = \gamma\omega \frac{1}{3-\lambda} \sqrt{\left(\frac{J}{H_n}\right)^{3-\lambda}} \ .$$

Die erste Formel für A_m ist für die Sterne der Bonner Durchmusterungen, die zweite für die der Herschelschen Sternaichungen anzuwenden. Es seien h_{m^1} und h_m die Helligkeiten der schwächsten Sterne in diesen beiden Gruppen, und zur Abkürzung werde gesetzt

$$z = \frac{h_{m^1}}{H_n}$$

so wird

$$\frac{A_m}{A_{m^1}} = \frac{H}{D} = \frac{1}{2} \sqrt{z^{-3-\lambda}} \left(5-\lambda - \frac{h_m}{h_{m^1}}(3-\lambda)\, z\right)$$

Die Formeln zur Bestimmung von z, H_n, A_∞ sind also dieselben die in der gewöhnlichen Geometrie und ohne Rücksicht auf die Absorption erhalten worden sind. Versteht man unter den unteren Indices die Größenklassen, so erhält man, entsprechend der Annahme $m = 14.0$, $m^1 = 9.2$ die schon unter [9]) angeführten Werte von n und A_∞. Um nun aus n die Dimensionen des Sternensystemes in Einheiten der Entfernung der Erde von der Sonne zu erlangen, muß man die Formeln

$$\sin x_n\, e^{k x_n} = a^{\frac{n}{2}+1} \sin x_{-2}\, e^{k x_{-2}} \quad , \quad \sin x_{-2} = \varrho \operatorname{tg} \frac{1}{R}$$

anwenden. Das Volumen einer Kugel, die das Sternensystem einschließt, also die für die Milchstraße geltende Größe r_n zum Halbmesser hat, ist $\pi R^3 (2x_n - \sin 2x_n)$. Daraus ergibt sich das Volumen des ganzen elliptischen Raumes, wenn man x_n mit $\frac{\pi}{2}$ vertauscht, gleich $\pi^2 R^3$. Das Verhältnis V der beiden Volumina ist bestimmt durch die Gleichung $\quad V = \dfrac{2x_n - \sin 2x_n}{\pi}$.

Um Δ zu berechnen, ist zuerst r_6, die Entfernung, in der ein Stern von der größten Leuchtkraft die Größe 6.0 hat, nach der Formel

$$\sin x_6\, e^{k x_6} = a^4 \sin x_{-2}\, e^{k x_{-2}}$$

zu ermitteln, sodann $f(x_6)$, $f(x_n)$ nach der Gleichung

$$f(x) = \frac{\cos x + k \sin x}{\sin \lambda x}\, e^{(3-\lambda) k x}$$

und damit ergibt sich

$$\Delta = \frac{f(x_6)}{f(x_n)} \ .$$

Auf einem Umlaufe im elliptischen Raume, also auf der Länge πR des Lichtkreises verliert das Licht $g = \frac{\log_{br} e^{2k\pi}}{\log_{br} a} = 6.82\ k$ Größenklassen. Die Umlaufszeit U des Lichtes erhält man mit Hilfe der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ des Lichtes aus der Formel

$$U = \frac{\pi R}{\mathfrak{V}}$$

und um U in Jahren zu erhalten, muß $\mathfrak{V} = 63\,400$ gesetzt werden.

Die Wahl von k und R soll nun in diesem Versuche durch die Bedingung eingeschränkt werden, daß das Gegenbild der Sonne ein Stern von der Größe 10.0 sei. Das ist zweckmäßig, weil wir für alle Sterne wenigstens bis zur Größe 9.2 so genaue, wiederholte Ortsbestimmungen haben, daß etwas Ungewöhnliches in ihnen, wie etwa eine sehr große Parallaxe, nicht hätte unbemerkt bleiben können. Es sei nun v die Geschwindigkeit der Bewegung der Sonne im Raume und es möge angenommen werden, daß die Bewegung der Sonne während eines Umlaufes des Lichtes gleichförmig auf einer kürzesten Linie erfolge. Dann trifft die Sonne das von ihr an einem bestimmten Ausgangsorte ausgesandte Licht, das aus dem Weltraume zurückkehrt, in der Entfernung

$$r = \pi R \frac{v}{\mathfrak{V} + v}.$$

Die entsprechende Größe x ist mit dem Werte $\frac{v}{\mathfrak{V} + v} = \frac{1}{10000}$ bestimmt durch die Gleichung

$$x = \frac{\pi}{10000}.$$

Die Parallaxe $\tilde{\omega}$ des Gegenbildes ergibt sich aus der Formel

$$\operatorname{tg} \tilde{\omega} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{R}}{\sin x}.$$

Gibt man der Sonne nach Zöllner (Müller, Die Photometrie der Gestirne, Leipzig 1897, S. 317) die Sterngröße -26.60, so muß das Gegenbild der Sonne 36.60 Größenklassen schwächer sein, als die Sonne. Da die Absorption des Lichtes auf der Weglänge $\pi - R$ erfolgt, so ist mit der Gleichung

$$1)\quad \sin \frac{1}{R}\, e^{k\frac{1}{R}} = a^{-18.3} \sin x e^{k(\pi - x)}$$

eine Relation zwischen k und R gegeben. Um eine zweite zu erhalten, wollen wir verschiedene Annahmen probieren:

I. Das Sternensystem erstrecke sich in der Richtung der größten Ausdehnung, also in der Milchstraße, über den ganzen elliptischen Raum. Es sei also $V = 1$ oder $x_n = \frac{\pi}{2}$ für $n = 13.28$. Dann stellen die Gleichungen

$$2)\quad e^{k\frac{\pi}{2}} = a^{7.64} \sin x_{-2}\, e^{kx_{-2}}, \quad \sin x_{-2} = \varrho \operatorname{tg} \frac{1}{R}$$

eine zweite Relation zwischen k und R dar. Aus den zwei Gleichungen 1), 2)

ergibt sich zunächst

$$k = 3.35 \quad , \; R = 1\,790\,000$$
$$r_n = 2\,810\,000, \; L = 44.2$$

und damit $g = 22.9 \quad , \; U = 88.5 \quad , \; \tilde{\omega} = 368''$

und in der Richtung der Milchstraße

$$\Delta = \frac{1}{2800} \; .$$

Die Annahme ist wegen des Wertes von $\tilde{\omega}$, besonders aber wegen dessen von Δ als unmöglich angesehen.

II. Die Dichtigkeit der Sterne nehme nach außen in allen Richtungen nur ab, nie zu, und das Minimum der Dichtigkeit liege in der Milchstraße selbst gerade auf der Grenze. Es sei dementsprechend für $n = 13.28$

$$2) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x_n = \dfrac{-(2-\lambda)k + \sqrt{(4-\lambda)k^2 - \lambda}}{(3-\lambda)k^2 - 1} \; , \; \sin x_n \, e^{k x_n} = a^{\frac{n}{2}+1} \sin x_{-2} \, e^{k x_{-2}} \; , \\ \sin x_{-2} = \varrho \operatorname{tg} \dfrac{1}{R} \; . \end{cases}$$

Die Gleichungen 1), 2) ergeben

$$k = 1.01 \quad , \; R = 2\,800\,000\,000$$
$$r_n = 217\,000\,000 \quad , \; L = 3430$$
$$g = 6.88 \; , \; U = 139\,000 \; , \; \tilde{\omega} = 0''.23$$
$$V = \frac{1}{5060}$$

und in der Milchstraße ist $\Delta = 1.90.$

Diese Annahme ist unzweifelhaft möglich, aber unnötig weitgehend.

III. Anstatt die Dichtigkeit der Sterne nach außen nur abnehmen zu lassen, scheint mir nämlich bei der ausgezeichneten Rolle, die der Milchstraße in unserem Systeme zufällt, durchaus zulässig zu sein, daß in der Milchstraße eine Zunahme auf das 10-fache bestehe. Die Annahme $\Delta = \frac{1}{10}$ entsprechen nun für $n = 13.28$ die Gleichungen:

$$2) \quad \begin{cases} \dfrac{\cos x_n + k \sin x_n}{\sin^{\lambda} x_n} \, e^{(3-\lambda) k x_n} = 10 \, \dfrac{\cos x_6 + k \sin x_6}{\sin^{\lambda} x_6} \, e^{(3-\lambda) k x_6} \\ \sin x_n \, e^{k x_n} = a^{\frac{n}{2}+1} \sin x_{-2} \, e^{k x_{-2}} \; , \; \sin x_6 \, e^{k x_6} = a^4 \sin x_{-2} \, e^{k x_{-2}} \; , \\ \sin x_{-2} = \varrho \operatorname{tg} \dfrac{1}{R} \; . \end{cases}$$

Die Gleichungen 1), 2) ergeben hier

$$k = 1.89 \quad , \; R = 175\,000\,000$$
$$r_n = 91\,500\,000 \quad , \; L = 1440$$
$$g = 12.90 \quad , \; U = 8660 \quad , \; \tilde{\omega} = 3''.76$$
$$V = \frac{1}{17.3} \; .$$

Der in der Milchstraße gültige Wert $\Delta = \frac{1}{10}$ wird mit nach außen stets zunehmender Dichtigkeit der Sterne erreicht, denn der Wert x, für den das Minimum der Dichtigkeit eintritt, ist kleiner als x_6; es ist nämlich $x_6 = 1.065 \; x$.

Senkrecht zur Milchstraße ist, entsprechend dem Werte $n = 12.41$

$$r_n = 73\,300\,000 \quad , \; L = 1160$$

$$\Delta = 0.853.$$

Der Wert x, für den hier die Dichtigkeit ein Minimum wird, liegt zwischen den beiden Grenzwerten; es ist nämlich $x_6 = 0.292\,x$, $x_n = 2.83\,x$ und entsprechend ist

$$\frac{D_6}{D_{min}} = 1.51 \quad , \quad \frac{D_n}{D_{min}} = 1.77.$$

Herr K. Schwarzschild scheint nach einer Bemerkung in seinem Vortrage „Über das zulässige Krümmungsmaß des Raumes“ (Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft, 35. Jahrgang, Leipzig 1900) den hier vorgetragenen ähnliche Betrachtungen angestellt zu haben. Aus anderen Untersuchungen, die aber gleichfalls mit der Dichtigkeit der Sterne zusammenhängen, gewinnt er das Resultat: „man darf, ohne mit Erfahrungstatsachen in Widerspruch zu geraten, die Welt enthalten denken in einem . . . . elliptischen Raume von einem Krümmungsradius über 100 000 000 Erdbahnradien, wofern man noch . . . . eine Absorption des Lichtes von 40 Größenklassen bei einem Umlaufe um den Raum annimmt.“ Der letzte Zusatz, über die Absorption, bedarf aber der Verbesserung, weil Herr Schwarzschild irrtümlich an dem sonnengleichen Gegenbilde, das ohne Absorption im Ruhezustande der Sonne eintreten würde, festhält. In ähnlicher Weise beruht es auf einem Irrtume, wenn Helmholtz in seinem bekannten Vortrage „Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome“ (Vorträge und Reden, 5. Aufl. Bd. 2, Braunschweig 1903, S. 28) von dem Anblicke unseres eigenen Hinterkopfes spricht, „welcher den äußersten Hintergrund des ganzen perspektivischen Raumes ausfüllen müßte“. Beides würde nur dann richtig sein, wenn die Geschwindigkeit des Lichtes unendlich groß wäre.

[16]) Die Sterngröße y, die das Gegenbild der Sonne haben würde, wenn das Sternensystem in der Richtung der Milchstraße den Raum ganz ausfüllte und keine Absorption vorhanden wäre, ergibt sich aus der Annahme I in [17]), indem $k = 0$ gesetzt wird. Es gelten also die Gleichungen

$$\operatorname{tg} \frac{1}{R} = \frac{a^{-7.64}}{\varrho} \quad , \quad a^{\frac{y}{2} + 13.30} = \sin \frac{\frac{\pi}{10000}}{\sin \frac{1}{R}} .$$

Daraus ergibt sich $y = -2.26$,

während die Größe des Sirius nach Newcomb-Engelmann, Populäre Astronomie, 3. Aufl. von H. C. Vogel, Leipzig 1905, S. 497) —1.7 ist. Der Wert y entspricht der größten Helligkeit, die das Gegenbild der Sonne überhaupt haben kann.

11168414