Hochansehnliche Versammlung!

Commilitonen!

Nicht ohne Bedenken entnehme ich, einem akademischen Brauche gemäss, das Thema zu meiner heutigen Antrittsrede meiner Fachwissenschaft, der Mathematik. Mit vollem Rechte gilt ja die Mathematik für eine der strengsten und schwierigsten Wissenschaften; von der überwiegenden Mehrzahl dieser festlichen Versammlung aber darf ich keineswegs annehmen, dass Sie seit Ihrer Schulzeit irgendwie mit mathematischen Studien sich befasst haben. Gleichwohl erbitte ich mir für einen Vergleich der synthetischen Geometrie des Alterthums mit derjenigen der Neuzeit Ihre Aufmerksamkeit; denn meine Fachwissenschaft steht mir viel zu hoch, als dass ich gerade heute sie verleugnen könnte. Ich werde mich bemühen, den auffallenden Unterschied der antiken und der modernen Geometrie ohne grossen gelehrten Apparat Ihnen darzulegen; fürchten Sie also nicht, dass ich andere als ganz elementare mathematische Kenntnisse hier voraussetzen werde.

Erst seit wenigen Jahrzehnten hat die neuere synthetische Geometrie sich zu gleichem Range mit der antiken emporgehoben; die grossen Forscher, denen sie ihren reichen Inhalt und ihren ebenso einfachen wie stolzen Aufbau vorzugsweise verdankt, wie Poncelet, Jacob Steiner, Möbius, Chasles, von Staudt, sie alle waren unsere Zeitgenossen. Anderseits ragt die antike Geometrie mächtig in die Gegenwart herein, und noch heute werden die Elemente der Planimetrie und der Stereometrie an den Gymnasien und Realschulen nicht viel anders gelehrt, als wie sie durch die Schriften des Euklid und des Archimedes uns überliefert wurden. Die Forderung einer Befruchtung und Neubelebung des geometrischen Schul-Unterrichtes durch Einführung der neueren Methoden macht sich immer häufiger und dringender geltend; deshalb dürfte ein Vergleich des älteren und des jüngeren Zweiges der Wissenschaft nicht unzeitgemäss sein.

Wohl verdient es die Geometrie, dass Sie ihr diese kurze Stunde schenken. Ist sie doch nächst der Astronomie[1] die erste und älteste exacte Wissenschaft! denn festbegründet steht sie seit mehr als zwei Jahrtausenden da als ein herrliches Denkmal hellenischen Geistes. Manche humanistischen Wissenschaften, wie die klassische Philologie, die Archäologie, die Wissenschaft des römischen Rechts, schöpfen aus dem Alterthume hauptsächlich ihren Stoff, ihr reiches Material; als Wissenschaften im heutigen Sinne gehören sie wesentlich der Neuzeit an. Die ältere Geometire dagegen, und sie allein von allen Wissenschaften, verdankt der antiken Welt gerade ihren wissenschaftlichen Ausbau und ihre streng logische Form;

[1] Ich denke hier nur an die Anfänge der Astronomie, welche zu der Berechnung und Eintheilung des Jahres und zu der Aufstellung des Kalenders geführt haben.

ihre Grundlinien sind gegenwärtig im Ganzen noch so, wie die Griechen sie vorgezeichnet haben. Unbestritten ist die Geometrie eines der wichtigsten Mittel zur geistigen Ausbildung der Jugend; dass selbst die einseitigsten Philologen dieses nicht zu bestreiten wagen, das danken wir Mathematiker der Autorität des Platon, über dessen Hörsaal nach alten Berichten die Inschrift stand: Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω (Keiner trete ohne Kenntniss der Geometrie herein!)

Und dann, welch' eminent praktische Bedeutung hat zugleich die Geometrie! Sie hat uns gelehrt, wie schon ihr Name besagt, das Land, die Erde auszumessen; mit ihrer Hülfe bestimmen wir die scheinbaren und wirklichen Bewegungen von Sonne, Mond und Planeten, berechnen wir die Grösse dieser Himmelskörper, ermitteln wir sogar die ungeheuren Entfernungen von Fixsternen; ohne sie wird heutzutage kein grösseres Bauwerk entworfen, keine Landstrasse oder Eisenbahn angelegt, keine Maschine construirt. Im Bunde mit der Astronomie offenbart sie dem Schiffer auf weitem Ocean und dem Entdeckungsreisenden im Herzen Africas oder Australiens die geographische Länge und Breite und zeigt ihm den Weg zum Ziele. Kein Zweig der Naturwissenschaften, kein Gebiet der Technik kann die Geometrie entbehren, und häufiger als man denkt, sind ihre Anwendungen im täglichen Leben.

Das erste Material für die spätere Geometrie stammt unzweifelhaft aus Aegypten, dem Lande der uralten Pyramiden und der grossartigen Kanal- und Schleusenbauten.[1] Aber erst die Griechen haben, von Thales und Pythagoras an, dieses Material allmählich vervollständigt und zu einer Wissenschaft ausgebildet. Ihnen allein ver-

[1] Vgl. hierüber das vortreffliche Buch Brettschneider's, die Geometrie und die Geometer vor Euklides, Leipzig 1870.

danken wir die antike Geometrie; dagegen fehlt den Römern für die Mathematik überhaupt jegliches Verständniss und Interesse.

Die modernen Culturvölker stehen demnach in der synthetischen Geometrie, wie in so vielen Zweigen der Kunst und Wissenschaft, durchaus auf den Schultern der alten Griechen, und dennoch haben sie, voran die Deutschen und Franzosen, in unserem Jahrhundert eine von der antiken wesentlich verschiedene Geometrie geschaffen. Worin besteht dieser Unterschied? Besteht er etwa in dem grösseren Reichthume des Inhaltes der neueren Geometrie? — Allerdings ist ihr Stoff in das Unbegrenzte gewachsen, wir besitzen gegenwärtig Methoden, um immer neue und wieder neue Flächen, Linien und andere Raumgebilde hervorzubringen und ihre mannigfaltigen Eigenschaften zu untersuchen, und die Entdeckung neuer Curven bietet nicht mehr, wie im Alterthume diejenige der Spirale, der Kegelschnitte, der Quadratix, der Conchoide, ein besonderes Interesse. Gleichwohl unterscheidet sich die neuere synthetische Geometrie von ihrer älteren Schwester nicht so sehr durch die grössere Fülle des Inhaltes, als vielmehr durch ihre allgemeineren Gesichtspunkte, durch die ihr eigenthümlichen Forschungsmethoden und durch das höhere Ziel, das sie sich gesetzt hat. Die nähere Erörterung dieses Unterschiedes bietet, wie ich glaube, nicht nur für den Mathematiker, sondern für jeden Gebildeten einiges Interesse. Suchen wir zunächst das Characteristische der antiken Geometrie uns zu vergegenwärtigen!

Die Grundlage der Geometrie und insbesondere des geometrischen Unterrichtes bilden seit fast 22 Jahrhunderten die Elemente Euklid's, des grossen Geometers von Alexandrien; ihr Inhalt ist uns allen von der Schulzeit her im Wesentlichen bekannt. Auf wenige Definitionen und

Grundsätze gestützt baut sich in ihnen systematisch und streng logisch die Raumwissenschaft auf, in einfachen, wenn auch etwas starren Formen. Die Sätze von der Congruenz der Dreiecke, von den Parallelen, von der Gleichheit der Figuren, vom Kreise, von der Aehnlichkeit u. s. w. folgen nebst einfachen Anwendungen so auf einander, dass jeder Satz auf die vorhergehenden sich stützt und in ihnen seine Begründung findet; der Schüler bekommt daher alsbald den Eindruck, eine wesentlich andere Anordnung der Planimetrie und analog der Stereometrie sei überhaupt unmöglich. Dieser Eindruck wird noch verstärkt durch den Umstand, dass alle Definitionen, Lehrsätze und Aufgaben bei Euklid, wie überhaupt bei den griechischen Mathematikern, als etwas von vorn herein Gegebenes erscheinen; wie man zu ihnen gelangt ist, wird nirgends gesagt. Unvermittelt tritt jeder einzelne Lehrsatz auf; regelmässig wird er sodann zweimal wiederholt, zuerst mit Bezug auf die zugehörige Figur und dann, nachdem sein strenger, etwas pedantischer Beweis geführt ist, nochmals mit dem Schlusse, dass er also richtig sei.

Die Darstellung wird dadurch schwerfällig und unbeholfen. Nur zu leicht erscheint die Euklidische Geometrie dem Schüler als abgeschlossen und in sich vollendet, keiner Weiterbildung fähig, und sie ist in der That wenig anregend. Mit Recht sucht man diese Mängel in den neueren Lehrbüchern der Elementargeometrie möglichst zu vermeiden und insbesondere durch zahlreiche Constructionsaufgaben die Jugend zu schöpferischer Thätigkeit anzuregen. Aber noch heute gelten die Elemente Euklid's mit gutem Grade als die vorzüglichste Schule der Logik und als bewundernswürdiges Vorbild geometrischer Strenge.

Bald nach Euklid macht die antike Geometrie ihre bedeutendsten Fortschritte durch Archimedes und Apollonius. Wir erinnern nur an das bekannte Exhaustionsverfahren des Archimedes, an seine Berechnung der Kugelzonen und Parabelabschnitte und an seine Spiralen, sodann an die acht Kegelschnittbücher des Apollonius und seine Berührungsprobleme für Kreise. Auch die Form der Darstellung wird, namentlich bei Archimedes, eine freiere, leichtere. Aber wie bei allen griechischen Mathematikern, so bleibt uns auch bei diesen schöpferischen Geistern ersten Ranges der Weg verborgen, auf welchem sie zu ihren ausserordentlichen Entdeckungen gelangt sind. Sie verschweigen ihre leitenden Gedanken, sie verwischen nicht selten den inneren Zusammenhang ihrer Sätze, sie reihen die Ergebnisse ihrer Forschungen an einander, nicht wie sie gefunden sind, sondern wie sie am leichtesten bewiesen werden können, und ihr Bestreben ist wesentlich nur darauf gerichtet, durch strenge Logik die Anerkennung ihrer Theoreme zu erzwingen.

Freilich ist der Weg des Entdeckers, wie überall sonst, so auch in der Mathematik fast nie der einfachste und kürzeste, und wer Anderen seine Entdeckungen mittheilen will, pflegt heute so gut wie vor 2000 Jahren dem nächsten Wege den Vorzug zu geben. Dabei aber legen unsere heutigen Wissenschaften auf die Ausbildung und Ueberlieferung fruchtbarer *Methoden* der Forschung vielfach grösseren Werth als auf ihre einzelnen Ergebnisse, und gerade solche Methoden vermissen wir in den Schriften des Alterthums nur zu sehr.

Die geometrischen Probleme und Sätze der Griechen beziehen sich allemal auf bestimmte, oft recht complicirte Figuren. Nun können aber die Punkte und Linien einer solchen Figur häufig sehr verschiedene Lagen zu einander annehmen; jeder dieser möglichen Fälle wird alsdann für sich besonders erörtert. Dagegen lassen die heutigen Mathematiker ihre Figuren aus einander entstehen, und sind gewohnt, sie als veränderlich zu betrach-

ten; sie vereinigen so die speciellen Fälle und fassen sie möglichst zusammen unter Benutzung auch negativer und imaginärer Grössen. Das Problem z. B., welches Apollonius in seinen zwei Büchern de sectione rationis behandelt, löst man heutzutage durch eine einzige, allgemein anwendbare Construction; Apollonius selber dagegen zerlegt es in mehr als 80 nur durch die Lage verschiedene Fälle. So opfert, wie Hermann Hankel treffend bemerkt, die antike Geometrie einer scheinbaren Einfachheit die wahre, in der Einheit der Principien bestehende; sie erreicht eine triviale *sinnliche* Anschaulichkeit auf Kosten der Erkenntniss vom Zusammenhange geometrischer Gestalten in allem Wechsel und in aller Veränderlichkeit ihrer sinnlich vorstellbaren Lage.

Die Geometrie des Alterthums ist speciell, allgemeine Principien und Forschungsmethoden fehlen ihr, und an das Vorstellungsvermögen oder die Gabe der räumlichen Anschauung stellt sie sehr geringe Anforderungen. Die neuere synthetische Geometrie dagegen sucht stets die Fülle ihrer Wahrheiten unter allgemeinen Gesichtspunkten zu vereinigen; sie hat nicht, wie die Griechische, blose Beweismethoden ausgebildet, sondern auch Methoden der Forschung, welche ihre Jünger in den Stand setzen, neue Wahrheiten selbständig zu entdecken; sie stützt sich endlich ganz wesentlich auf die Anschauung.

Die moderne Geometrie ist keineswegs weniger streng als die antike, sie legt vielmehr auf unumstössliche Beweise das gleiche Gewicht wie diese. Aber sie beschränkt sich nicht wie die Griechische darauf, die Eigenschaften der Raumgebilde klar darzulegen und sicher zu begründen, sondern ihr eigentliches Ziel ist, den inneren Zusammenhang dieser Eigenschaften aufzudecken und, wie Jacob Steiner im Titel seines Hauptwerkes sich ausdrückt, « die Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander systematisch zu entwickeln ». Um Ihnen dieses höhere Ziel und die Wege, auf denen man es zu erreichen sucht, deutlicher zu zeigen, will ich Ihnen einen näheren Einblick in die neuere synthetische Geometrie zu verschaffen suchen, und Sie insbesondere mit gewissen, elementar darstellbaren Methoden derselben bekannt machen.

Die Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln wurden seit ihrer Entdeckung durch Menaechmus von den Alten stets als Schnitte gerader oder schiefer Kreiskegel aufgefasst; die Kegel selbst aber blieben ihren darauf bezüglichen Untersuchungen fast gänzlich fremd. Der räumlichen Anschauung nur das Nöthigste zumuthend, gingen nämlich die Griechen alsbald über zu der ausschliesslichen Betrachtung der Kegelschnitte in ihren Ebenen. Apollonius insbesondere leitet mittelst Proportionen am Kegel selbst nur diejenigen Eigenschaften der Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln ab, welche wir heute als die verallgemeinerten Scheitelgleichungen dieser Curven bezeichnen [1]; im Uebrigen stützt sich seine Theorie der Kegelschnitte lediglich auf diese Gleichungen. Erst unser 19. Jahrhundert hat eine wichtige, auf die Anschauung sich gründende Methode ausgebildet, durch welche eine Reihe fundamentaler Eigenschaften unmittelbar aus der Entstehungsart der Kegelschnitte abgeleitet und vom Kreise auf sie und die Kegel übertragen werden können.

Diese Methode der centralen Projection verdanken wir vornehmlich einem Sohne unseres Reichslandes, dem 1788 in Metz geborenen Poncelet. Durch Monge, den genialen Vervollkommner der descriptiven Geometrie, zu geometrischen Forschungen neuer Art angeregt, fand Poncelet 1813 in der russischen Gefangenschaft die unfreiwillige Musse, sie weiter zu verfolgen. Vielleicht war es ein Glück für uns, dass er, von allen wissenschaftlichen Hülfsmitteln entblösst, im fernen Saratoff auch dem unmittelbaren Einflusse der antiken Geometrie entrückt war.

[1] Apollonii conicorum lib. I, prop. X-XIV.

— Doch lassen Sie mich versuchen, seine «Methode des Projicirens und Schneidens», wie sie jetzt gewöhnlich genannt wird, Ihnen in Kürze darzulegen. [1]

Wird irgend ein Gegenstand, etwa ein Gebäude, von einem Punkte aus, den ich kurzweg das Auge nennen will, betrachtet, so wirft jeder sichtbare Punkt des Gebäudes einen Strahl oder Schein in das Auge, den sogenannten Projectionsstrahl. Der Schein des ganzen Gebäudes setzt sich also aus vielen Strahlen zusammen, von denen jeder einen oder mehr als einen Punkt vom Auge aus «projicirt». Liegt eine Anzahl von Punkten in einer nicht durch das Auge gehenden geraden Linie, so liegen ihre Projectionsstrahlen alle in der Ebene, welche die Gerade mit dem Auge verbindet; jede solche Gerade wird also vom Auge aus durch eine Ebene projicirt. Ebenso wird eine krumme Linie im Allgemeinen durch eine conische Fläche projicirt, und insbesondere ein Kreis durch einen Kreiskegel.

Den Schein eines Gebäudes können wir nun durch eine Ebene, etwa durch diejenige einer Glasscheibe, auffangen oder «schneiden», indem wir jeden Projectionsstrahl in einem Punkte und jede projicirende Ebene in einer Geraden schneiden. Wir erhalten auf diese Weise in der Ebene ein perspectivisches Bild, eine «Projection» des Gebäudes; dieses Bild aber sendet offenbar denselben Schein in das Auge wie das Gebäude selbst, und ist deshalb vorzüglich geeignet, wenn es in den richtigen Linien und Farben ausgeführt ist, uns eine Vorstellung von letzterem zu verschaffen. Die Photographieen räumlicher Gegenstände sind im Wesentlichen solche perspectivische e b e n e Bilder derselben.

[1] Poncelet stellt diese Methode an die Spitze seines 1822 veröffentlichten Traité des propriétés projectives des figures.

Die perspectivischen Ansichten der Architecten sind ebenso wie die bekannten Vogel- und Froschperspectiven nichts anderes als Centralprojectionen; und alle in der descriptiven Geometrie üblichen Projectionsarten, insbesondere die Darstellungen von Gegenständen durch Grundriss und Aufriss, sind in der Centralprojection als Specialfälle mit enthalten.

Wie man mittelst dieser Methode durch blose räumliche Anschauung wichtige Sätze finden und zugleich beweisen kann, möge ein einfaches Beispiel zeigen. Parallele Gerade werden vom Auge aus durch Ebenen projicirt, welche sich alle in einer Geraden schneiden, nämlich in der durch's Auge gelegten Parallelen; von einer beliebigen Ebene aber werden diese projicirenden Ebenen in Geraden geschnitten, die alle durch einen Punkt, die Spur jener Schnittlinie, gehen. Folglich müssen in perspectivischen Ansichten eines Gebäudes oder anderen Gegenstandes die Bilder paralleler Kanten alle nach einem Punkte, dem sog. Fluchtpunkte, zusammenlaufen, und nur in einem leicht angebbaren, besonderen Falle sind sie ebenfalls parallel. Wir haben damit beiläufig einen bekannten Hauptsatz der Centralperspective aufgestellt und bewiesen.

Vor Allem aber lehrt uns die Methode des Projicirens und Schneidens, wie man aus einer Figur andere ableiten und zugleich gewisse Eigenschaften der ersteren Figur auf letztere übertragen kann. So erhalten wir alle Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln unmittelbar als Centralprojectionen der Kreise, d. h. als ebene Schnittcurven von Kreiskegeln. Und wenn beispielsweise vom Kreise feststeht, dass die drei Hauptdiagonalen eines jeden ihm umschriebenen Sechseckes sich in einem Punkte schneiden, so gilt dieser Satz ohne Weiteres auch von jedem beliebigen Kegelschnitte. Damit ist dann eine fundamentale Eigenschaft dieser so vielfach auftretenden Curven durch jene Methode erwiesen.

Die antike Geometrie beschäftigt sich fast ausschliesslich mit solchen Eigenschaften und Beziehungen der Raumgebilde, in denen das Mass eine Rolle spielt. Ihre Sätze handeln im Wesentlichen von der Congruenz, Gleichheit oder Aehnlichkeit, vom Inhalte der Figuren, von Proportionen geradliniger Strecken u. dgl. m.; nur ganz vereinzelt finden sich bei den Griechen sog. projective Sätze, welche lediglich die gegenseitige Lage von Punkten, Linien und Flächen, nicht aber Massverhältnisse derselben betreffen.

Die neuere Geometrie nun hat gerade den vom Masse unabhängigen projectiven Eigenschaften der Raumgebilde besondere Aufmerksamkeit zugewendet, indem sie dieselben als die umfassenderen und wichtigeren erkannte. Sie wurde reich belohnt durch die Entdeckung des fruchtbaren Princips der Dualität, welches die eine Hälfte dieser Eigenschaften unmittelbar auf die andere zurückführt und dadurch ihr Studium ausserordentlich erleichtert. Durch dieses Princip wird nämlich jedem nicht metrischen Satze, welcher von Punkten im Raume handelt, ein anderer gegenüber gestellt, der ihn gewissermassen ergänzt, indem er von Ebenen die reciproken Eigenschaften aussagt. Jeden dieser beiden Sätze kann man aus dem anderen ableiten, indem man die Ausdrücke Punkt und Ebene, Verbindungslinie zweier Punkte und Schnittlinie zweier Ebenen, Projiciren aus Punkten und Schneiden durch Ebenen, u. s. w. mit einander vertauscht. Anerkanntermassen bietet die Geometrie Nichts, was für den Anfänger anregender wäre, ihn mehr zum Selbstschaffen anspornte, als dieses Dualitäts-Princip. Um Ihnen dasselbe zum Bewusstsein zu bringen, brauche ich nur einige elementare, direct darauf hinweisende Sätze einander gegenüber zu stellen, z. B.:

Zwei Punkte bestimmen eine Gerade, nämlich ihre Verbindungslinie.

Eine Gerade und ein nicht auf ihr liegender Punkt bestimmen eine Ebene.

Drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmen eine Ebene.

Zwei Gerade, die einen Punkt gemein haben, liegen in einer Ebene.

Zwei Ebenen bestimmen eine Gerade, nämlich ihre Schnittlinie.

Eine Gerade und eine nicht durch sie gehende Ebene bestimmen einen Punkt.

Drei Ebenen, die nicht durch eine Gerade gehen, bestimmen einen Punkt.

Zwei Gerade, die in einer Ebene liegen, haben einen Punkt gemein.

Zu diesen dualen Sätzen ist jedoch zu bemerken, dass ein Punkt, und ebenso eine gerade Linie, auch unendlich weit wegrücken kann.

Wie im Raume der Punkt und die Ebene, so stehen in der Ebene der Punkt und die Gerade einander dual gegenüber. Beispielsweise kann eine ebene Curve aufgefasst werden als stetige Aufeinanderfolge einerseits von Punkten, anderseits von (sie einhüllenden) Geraden oder Tangenten.

Das Dualitätsprincip ist in elementarer Weise zuerst von Gergonne 1826 begründet worden[1]; doch hatte schon früher Poncelet nachgewiesen, dass zu jedem Raumgebilde ein ihm dual gegenüberstehendes existirt. Die projectiven Eigenschaften des Gebildes können sofort, ohne dass ein neuer Beweis erforderlich wäre, auf dieses ihm gewissermassen entgegengesetzte Gebilde reciprok übertragen werden. So ist z. B. die vorhin erwähnte fundamentale Eigenschaft der einem Kegelschnitte umschriebenen Sechsecke 1806 von Brianchon entdeckt und bewiesen worden, indem er sie auf die schon 1639 von Pascal entdeckte, duale Eigenschaft der eingeschriebenen

[1] In Gergonne's Annales de mathématiques, T. XVI.

Sechsecke zurückführte. In dem Dualismus der neueren Geometrie ist demnach eine fruchtbare, den Griechen unbekannte Forschungsmethode enthalten; duale räumliche Gestalten aber werden gerade durch ihren Gegensatz in einen nahen, höchst merkwürdigen Zusammenhang gebracht.

Die metrischen Relationen der Raumgebilde sind übrigens von den Neueren durchaus nicht vernachlässigt worden; vielmehr ist auch ihr Bereich in unserem Jahrhundert durch wichtige Resultate und neue Forschungsmethoden wesentlich erweitert worden. Für die Geometrie der Kreise und Kugeln insbesondere hat die Methode der Inversion oder der reciproken Radien grosse Bedeutung erlangt. Dieselbe wurde fast gleichzeitig 1833 und 1834 von Magnus und Plücker als «ein neues Uebertragungsprincip» bekannt gemacht, und später von William Thomson und von Moebius auf's Neue entdeckt; sie verdient wohl, dass wir noch kurz bei ihr verweilen.

Sei ein fester Punkt, ein Centrum, gegeben; dann mögen je zwei Punkte, die mit dem Centrum in einer Geraden liegen, «inverse Punkte» genannt werden, wenn das Produkt ihrer Abstände vom Centrum einen gegebenen Werth hat.[1] Wenn von zwei inversen Punkten der eine dem Centrum sich nähert, so entfernt sich demnach der andere vom Centrum; durchläuft der eine irgend eine Curve oder Fläche, so beschreibt der andere die inverse Curve oder Fläche. Durch Inversion können also aus einer Fläche oder Curve andere abgeleitet werden, die mit ihr gewisse Eigenschaften gemein haben.

Ohne Schwierigkeit lässt sich beweisen, dass Kugeln und Kreise durch Inversion im Allgemeinen wieder in Kugeln und Kreise sich verwandeln; nur wenn sie durch

[1] Dieses Produkt sei positiv oder negativ, je nachdem die beiden Punkte auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten des Centrums liegen.

das Centrum gehen, verwandeln sie sich in Ebenen und Gerade, letztere aber bilden mit einander dieselben Winkel wie sie. Daraus folgt, dass überhaupt zwei Flächen oder Linien sich in ihren gemeinschaftlichen Punkten unter denselben Winkeln schneiden, wie die inversen Flächen oder Linien in den inversen Punkten. Durch Projection aus dem Centrum werden also inverse Flächen so auf einander abgebildet, dass ihre inversen kleinsten Theile dieselben Winkel haben und folglich ähnlich sind. Wird z. B. eine Kugelfläche aus einem ihrer Punkte auf eine Ebene projicirt, die zur Berührungsebene des Punktes parallel ist, so erhält man von ihr ein in den kleinsten Theilen ähnliches Bild; diese sog. «stereographische» Projection der Kugel, welche übrigens schon dem Astronomen Ptolemaeus bekannt war, wird deshalb in der Kartographie häufig benutzt. — Doch lassen Sie mich hier abbrechen; meine Absicht war ja, Ihnen von der Methode der Inversion, nicht aber von ihren zahlreichen Anwendungen einen Begriff zu geben.

Hochansehnliche Versammlung!

Das Bestreben, Ihnen einen Einblick in die neuere synthetische Geometrie zu verschaffen und so den Vergleich derselben mit der antiken Geometrie bis zu einer gewissen Stufe durchzuführen, hat mich vielleicht hie und da etwas schwer verständlich gemacht. Denn auch die elementarste Darstellung der Centralperspektive, des Dualitätsprincipes oder der Inversions-Methode nimmt das Vermögen der räumlichen Anschauung in ungewohnter Weise in Anspruch. Dieser Schwierigkeit haben wir es vornehmlich zuzuschreiben, dass die Kenntniss der neueren synthetischen Geometrie in Deutschland noch wenig verbreitet ist, und dass gar manche Mathematiker, besonders unter den älteren Gymnasiallehrern, nicht ein-

mal mit ihren wichtigeren Methoden sich vertraut gemacht haben. Wer aber die Eigenschaften räumlicher Gebilde wirklich begreifen will, muss früher oder später die Schwierigkeit überwinden, sich dieselben auch ohne Versinnlichungsmittel räumlich vorzustellen, er muss sein Anschauungsvermögen üben und kräftigen. Die neuere synthetische Geometrie ist offenbar als Bildungsmittel in dieser Hinsicht der antiken weit überlegen.

Was bezweckt der geometrische, was überhaupt der höhere Schulunterricht? Die Aufgabe der Schule ist, die heranwachsende Jugend mit den Grundlagen unserer Gesittung und Bildung vertraut zu machen, ihre Geisteskräfte allseitig zu entwickeln und auszubilden und sie mit nützlichen Kenntnissen und Fertigkeiten für das Leben auszurüsten. Dass die Kenntniss der neueren synthetischen Geometrie von grossem Nutzen ist, dass insbesondere die heutigen Projectionsmethoden nicht allein für Techniker und Naturforscher, sondern für jeden Gebildeten von hohem Interesse sind, wird kein Kundiger bestreiten. Dem geometrischen Unterrichte aber fällt vor Allem die Aufgabe zu, das Vorstellungsvermögen, die Gabe der räumlichen Anschauung in den Schülern zu wecken und zu kräftigen, sowie ihren Verstand durch logisches Denken und richtiges Schliessen zu üben und zu schärfen. An den Figuren in der Ebene und an den einfachen Gestalten der Prismen, Pyramiden, Kegel, Cylinder und Kugeln, auf welche der herkömmliche geometrische Unterricht unserer Gymnasien sich beschränkt, kann aber das Anschauungsvermögen nur mangelhaft sich ausbilden. Wie ganz anders wird es geübt und fortwährend in Anspruch genommen durch die Umwandlungsmethoden der neueren Geometrie, welche aus einem Raumgebilde unzählige andere entstehen lassen und zugleich deren Eigenschaften uns offenbaren! Auf strenge Logik, wir wiederholen es, legt die neuere synthetische

Geometrie denselben Werth wie die antike; sie ist aber mannigfaltiger, anregender, anschaulicher als diese, ist überhaupt reicher an Bildungselementen als die meisten übrigen Zweige der Elementarmathematik.

Damit aber ist die Antwort auf die Frage gegeben ob die neuere synthetische Geometrie in die höheren Schulen einzuführen ist oder nicht. Ihre Einführung ist unabweislich; Bildungselemente, welche zu den besten und fruchtbarsten der elementaren Mathematik gehören, dürfen unserer Jugend nicht vorenthalten bleiben zu Gunsten anderer minderwerthiger; durch Ausscheidung der letzteren können sie nach meiner Ueberzeugung ohne neue Belastung den Schülern der oberen Classen zugänglich gemacht werden. [1]

Lassen Sie mich schliessen mit den enthusiastischen Worten eines früh verstorbenen Mathematikers, [2] der selber kein Synthetiker war!

«Euklid hatte einst seinem Könige Ptolemaeus, der, «wie wir begreifen, das mühsame Studium der ««Ele- «mente»» abschreckend fand, mit dem ganzen Stolze «eines Gelehrten erwidert: ««Es giebt keinen Königsweg «zur Mathematik.»» Wir aber können hinzufügen: die «neuere Geometrie ist dieser Königsweg, sie «hat ««den Organismus aufgedeckt, durch welchen die ««verschiedenartigsten Erscheinungen in der Raumwelt ««mit einander verbunden sind»» [Steiner], und hat, wie «wir ohne Uebertreibung sagen können, das Ideal einer «Wissenschaft beinahe erreicht.»

[1] Ich theile durchaus die Ansicht, welche mein Freund R. Sturm noch als Gymnasiallehrer (in der Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht, I, S. 476) geltend gemacht hat, dass bei einem intensiveren, geometrischen Unterrichte unzweifelhaft mehrere Kapitel der Algebra, wie die höheren Reihen, Kettenbrüche, diophantischen Gleichungen, ohne Schaden aus dem Gymnasium ausscheiden können.

[2] Hankel, Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten. Ein Vortrag. Tübingen 1869.

DER

RECTORATSWECHSEL

AN DER

KAISER-WILHELMS-UNIVERSITÄT

STRASSBURG

AM 30. APRIL 1887.

STRASSBURG
Universitäts-Buchdruckerei von J. H. Ed. Heitz
(Heitz & Mündel)
1887.